清华大学学术专著

人工边界方法

——无界区域上的偏微分方程数值解

韩厚德　巫孝南　著



清华大学出版社


ISBN 978-7-302-20539-5
9 787302 205395 >
定价：69.00元

清 华 大 学 学 术 专 著

人工边界方法

——无界区域上的偏微分方程数值解

韩厚德　巫孝南　著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

人工边界方法是求解无界区域上偏微方程(组)数值解的一个重要和有效的方法。人工边界方法的核心问题是在人工边界上如何对已知的问题找出问题的解满足的准确(或者高精度近似)的边界条件。借助于人工边界方法，我们可将无界区域上的问题简化为有界区域上的问题进行数值计算。本书系统地介绍了人工边界方法的计算格式及其理论基础。本书可以作为科学与工程计算专业研究生课程的教材，亦可以作为科学与工程计算专业科学技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

人工边界方法：无界区域上的偏微分方程数值解/韩厚德，巫孝南著. —北京：清华大学出版社，2009.10

(清华大学学术专著)

ISBN 978-7-302-20539-5

Ⅰ.人…　Ⅱ.①韩…　②巫…　Ⅲ.偏微分方程-数值计算　Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 111072 号

责任编辑：陈朝晖
责任校对：赵丽敏
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京铭成印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：153×235　**印　张**：24.75　**字　数**：464 千字
版　次：2009 年 10 月第 1 版　**印　次**：2009 年 10 月第 1 次印刷
印　数：1～2000
定　价：69.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：018719-01

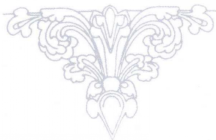
作者简介



韩厚德，1938 年11月6日生于河南开封。1960年毕业于北京大学数学力学系。先后在北京大学、清华大学任教，在中国科技大学任兼职教授。曾担任清华大学应用数学研究所所长，中国计算数学学会副理事长。 韩厚德的研究领域为计算数学。他在偏微分方程数值解的研究中取得了一系列重要的创造性成果，特别是在无界区域上偏微分方程的数值解，有限元与边界元的对称耦合法，边界积分－微分方程和变分不等式问题的数值解，奇异摄动问题的数值解，不适定问题的数值解，低阶四边形非协调有限元的构造，无限元方法等研究方向上做出了重要的贡献。在国内外学术刊物上发表学术论文一百余篇，其中被SCI收录七十余篇，论文被他人引用六百余次。韩厚德曾获得国家自然科学奖二等奖(2008)，Pieter Hemker奖(2008)，北京市科技进步二等奖(2002)，国家教委科技进步一等奖(1995)和二等奖(1988)，国家科学大会奖(1978)等多项奖励。



巫孝南，香港浸会大学数学系教授，生于1955年，1982年毕业于南京大学数学系，1984年北京大学数学硕士，1991年美国卡内基－梅隆大学数学博士。主要研究方向为偏微分方程数值解，包括无界区域上初边值问题的数值解，带有奇性问题的数值解，离散人工边界条件，低阶有限元及差分格式。发表论文四十余篇。



序

在科学与工程计算中有大量的实际问题可归结为数值求解无界区域上的偏微分方程，而大部分计算方法，例如有限元和差分方法都是针对有界区域上的问题而设计的。如何将无界区域上的问题转化为有界区域上的问题，数学上有多种办法。一种自然的想法是先用某个有界区域来逼近无界区域，再在此特定的有界区域上找出所研究的方程应该满足的准确或近似的边界条件，即所谓人工边界条件，然后再数值求解此有界区域上偏微分方程的边界值问题。

自 20 世纪 70 年代后期开始，数学家和工程师进行了大量的系统深入的研究，发明了许多种处理和确定人工边界条件的方法和技术。冯康先生早在 1980 年就研究过所谓的吸收边界条件，随后本书的作者之一韩厚德，以及余德浩等我国学者也陆续加入这个研究行列。他们提出了一系列构造人工边界条件的有效方法，特别是能和有界区域上的有限元方法自然耦合，成为求解无界区域上偏微分方程的一种实用方法。这是中国学者在这一个重要的应用数学领域作出的世界性贡献，在国际上享有声誉。韩厚德和余德浩两位教授也因此共同获得 2008 年国家自然科学二等奖。获奖项目的名称为“人工边界方法与偏微分方程数值解”。

本书是韩厚德教授和香港浸会大学巫孝南教授在多年研究工作的基础上，同时吸收世界各国有关专家的研究成果写成的一本专著。此书系统介绍了人工边界方法的计算格式及其数学理论基础，内容丰富，文笔流畅。相信它的问世将进一步推动这项研究并吸引更多的年轻学者加入其中。

我十分高兴看到本书的出版并乐于为序。

石钟慈
中科院计算数学研究所
2009 年 3 月于北京

前　言

人工边界方法是求解无界区域上偏微方程 (组) 数值解的有效方法，经过三十多年的发展日渐成熟。人工边界方法已被广泛地应用于各种科学与工程计算问题；同时人工边界方法的收敛性分析和误差估计理论 (特别是对线性偏微方程 (组)) 已逐步被建立起来。作者在多年研究工作的基础上汲取其他专家的研究成果将人工边界方法的算法和理论写成这本书。

本书的部分内容曾于 2005 年秋季和 2007 年春季作为研究生课程的讲义内容分别在清华大学数学科学系和中国科技大学数学系讲授过。

本书包括 9 章。第 1 章：二阶椭圆型方程的整体人工边界条件；第 2 章：Navier 方程组和 Stokes 方程组的整体人工边界条件；第 3 章：热传导方程和 Schrödinger 方程的整体人工边界条件；第 4 章：声波方程，Klein-Gordon 方程和线性 KdV 方程的完全吸收边界条件；第 5 章：局部人工边界条件；第 6 章：离散人工边界条件；第 7 章：隐式人工边界条件；第 8 章：非线性人工边界条件；第 9 章：对带奇性问题的应用。其中第 1、2、4、6、7、8 章由韩厚德执笔，第 3、5、9 章由巫孝南执笔。

由于作者学识有限，错误和不妥之处在所难免，希望读者批评指正。

最后我们衷心感谢在这个研究方向上的合作者应隆安教授、包维柱教授、黄忠亿教授、郑春雄教授、孙志忠教授、金继承教授、文新博士、殷东生博士、许振礼博士等。

韩厚德　　巫孝南

2009 年 3 月 1 日

Preface

Artificial Boundary Method is an effective numerical method for solving partial differential equations on unbounded domains. With more than thirty years development, Artificial Boundary Method is getting mature in the recent years. Artificial Boundary Method has been applied to various problems in scientific and engineering computations, and the theoretical issues such as the convergence and error estimates of Artificial Boundary Method have been solved gradually. Based on the research works by the authors for many years and the works by other researchers, we collect the methods and theories of Artificial Boundary Method and write this book.

The partial contents of this book were taught in fall, 2005 and spring, 2007 in the Department of Mathematical Science of Tsinghua University and the Department of Mathematics of University of Science and Technology of China respectively.

This book has nine chapters:

Chapter 1: Global Artificial Boundary Conditions for the Exterior Problem of Second Order Elliptic Equations;

Chapter 2: The Global Artificial Boundary Conditions for the Navier System and Stokes System;

Chapter 3: Global Artificial Boundary Conditions for Heat and Schrödinger Equations;

Chapter 4: Absorbing Boundary Conditions for Wave Equation, Klein-Gordon Equation, and Linear KdV Equation;

Chapter 5: Local Artificial Boundary Condition;

Chapter 6: Discrete Artificial Boundary Condition;

Chapter 7: Implicit Artificial Boundary Condition;

Chapter 8: Nonlinear Artificial Boundary Condition;

Chapter 9: Application to Problems with Singularities.

We have striven for the accuracy and elegance in writing the book. However, errors are inevitable. We would be most grateful to learn of any errors in the

book, for the revision of future printings.

This book has benefited from works of other researchers, including our co-authors: Long-An Ying, Weizhu Bao, Zhongyi Huang, Chunxiaong Zheng, Zhizhong Sun, Jicheng Jin, Xin Wen, DongSheng Ying, and Zheli Xu.

Han Houde　　Wu Xiaonan

2009.3.1

Abstract

Artificial Boundary Method is one of the most important and effective numerical method for solving partial differential equations on unbounded domains.

The basic idea of the artificial boundary method is to introduce artificial boundaries and reduce the original problem to a boundary value problem on a bounded domain. The key point of the artificial boundary method is how to find the exact boundary conditions or design highly accurate approximate boundary conditions on the artificial boundaries.

This book discusses the key techniques of the artificial boundary method, its mathematical background, and applications in science and engineering.

This book is suitable as a course textbook for graduate students from scientific and engineering computation majors, and it can also serve as a reference book for researchers in this area.

目 录

绪　论

出现在科学与工程领域中的大量问题都可归结为无界区域上偏微分方程的数值求解问题。如机翼的绕流问题 (见图 0-1)，带无限大弹性地基坝体的应力分析 (见图 0-2)，流体在无限长管道中的流动 (见图 0-3)，波 (包括声波、弹性波、电磁波等) 在空间中的传播等都是典型的例子。在这些问题中物理区域的无界性给问题的数值求解带来了本质性的困难，而已有的成熟计算方法，例如有限差分方法和有限元方法都不能直接应用于数值求解这类问题。解决问题的一个办法是引进一个人工边界，将无界的物理区域分割为两部分：即有界的计算区域和余下的无界区域。新引进的人工边界成为有界计算区域 (或一部分) 的边界。如果我们能够在人工边界上找到原问题的解满足的边界条件，则可将原问题简化为有界计算区域上的问题进行数值求解。在早期的文献中人们常常直接将原问题的解在无穷远处满足的条件移植到人工边界上，例如 Dirichlet 边界条件 (或者 Neumann 边界条件) 是经常被应用的。一般地讲，它们不是原问题的解在人工边界上满足的准确



图 0-1　机翼的绕流问题

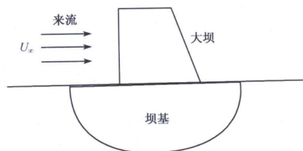


图 0-2　带无限大弹性地基坝体的应力分析

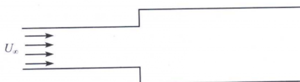


图 0-3　流体在无限长管道中的流动

边界条件，而仅仅是一个非常粗糙的近似边界条件。如果希望在有界计算区域上获得原问题的具有一定精度的数值解就必须保证所选取的有界计算区域足够大，但是在一个很大的有界计算区域上数值求解偏微分方程仍然不能大量地减少计算量和占用的内存。如何在给定的人工边界上找出原问题的解满足的准确边界条件或构造出高精度的近似人工边界条件就成为求解无界区域上偏微分方程数值解的一个核心问题。

最近三十年来，这个问题吸引了很多数学家和工程师的注意。人们针对各种问题和不同形状的人工边界应用多种方法和技巧进行了大量研究工作，使人工边界方法逐步发展成为数值求解无界区域上偏微分方程的一个重要高效方法。人工边界方法的核心问题是对已知的问题和引进的人工边界如何构造出原问题的解在人工边界上满足的“合适的”人工边界条件，从而将原问题简化为等价的或近似的有界计算区域上的问题 (以下称其为简化问题)。怎样的人工边界条件是“合适的”? 它应该满足下面的基本要求：

(1) 简化问题是适定的，即简化问题存在唯一解并且连续依赖于问题的边值 (和初值)。

(2) 简化问题的解在有界计算区域上等于原问题的解，或者简化问题的解是原问题的解在有界计算区域上的一个很好的近似。

(3) 为了实现减少计算量和节省内存的目标，有界计算区域应尽可能地小。

(4) 有界计算区域上的简化问题易于数值求解。

沿着这个方向出现了大量的研究成果。Engquist and Majda (1977) 应用有理逼近对波动方程得到了吸收人工边界条件。Han and Ying (1980) 研究了二维 Laplace 方程外问题的数值解，引进圆周作为人工边界，应用 Hilbert 变换方法求解积分方程得到了在圆周人工边界上 Laplace 方程外问题的准确人工边界条件，即在圆周人工边界上给出了原问题的解满足的 Steklov-Poincare 映射 (也称为 Dirichelet to Neumann 映射)。Feng (1980), Feng and Yu (1983) 讨论了二维 Laplace 方程和 Helmholtz 方程内外问题的数值解，应用 Green 函数方法在圆周人工边界上得到了原问题的解满足的准确人工边界条件 (用超奇异积分表示，文献中称此方法为自然边界方法 (Natural Boundary Method))。Goldstein (1982) 研究了某些 Helmholtz 型方程在无界区域上的数值解，得到了将原问题简化为有界计算区域上问题的人工边界条件。Feng (1984) 研究了 Helmholtz 方程的外问题，获得了 Helmholtz 方程外问题的渐进近似人工边界条件，这是一组局部的人工边界条件。Han and Wu (1985-A, 1985-B, 1992) 在圆周人工边界上对二维 Laplace 方程和二维弹性方程组的外问题应用傅里叶级数得到了级数形式的准确人工边界条件。很自然地对无穷级数进行截断可得到一系列各种精度的近似人工

边界条件，这是一类整体 (非局部) 人工边界条件，它可与有限元方法很自然地进行耦合。应用高精度的近似整体人工边界条件可以避免计算 (超) 奇异积分。Yu (1985) 也得到了二维 Laplace 方程外问题的级数形式的准确人工边界条件，同时 Han and Wu (1985-A), Yu (1985) 也给出了二维 Laplace 方程外问题的一系列各种精度的局部人工边界条件。Hagstrom and Keller (1986, 1987) 讨论了无限长柱体上偏微分方程的数值解，将无限长柱体截断为有限长柱体，在其上下截面上得到了人工边界条件；进一步将这类人工边界条件应用于求解无限长柱体上非线性偏微分方程的数值解 (在有限长柱体外的区域上将非线性偏微分方程线性化)。Halpern and Schatzman (1989) 研究了带小粘性系数的非定常二维 Oseen 方程组，在直线人工边界上得到了一组局部人工边界条件。Nataf (1989) 分析了定常 Oseen 方程组，在直线段人工边界上获得了开边界条件 (open boundary condition)。Keller and Givoli (1989) 研究了 Laplace 方程和 Helmholtz 方程的外问题，得到了级数形式的整体 (非局部) 人工边界条件。

进入 20 世纪 90 年代后，人工边界方法的研究到达一个快速发展的阶段。研究领域迅速扩展，逐步涉及多个科学与技术领域中出现的重要的偏微分方程(组)，例如：对二维和三维 Navier (线性弹性) 方程组，Stokes 方程组，Oseen 方程组都得到了准确的人工边界，对声波方程，Klein-Gordon 方程，Schrödinger 方程，弹性波方程组，电磁波方程组等波动方程 (组) 已获得了完全吸收的人工边界条件。最近几年人们对无界区域上的非线性偏微分方程(组) 的数值解给予特别的关注，对某些非线性偏微分方程，如 Burgers 方程，描述薄膜生长的 Kardar-Parisi-Zhang (K-P-Z) 方程，一维三次非线性 Schrödinger 方程，非线性 Korteweg-de Vries 方程等都得到了准确的非线性人工边界条件 (Han, Wu and Xu (2006), Xu, Han and Wu (2006), Zheng (2006-A), Zheng (2006-B))。同时人们对多种非线性波问题得到了各种近似的非线性人工边界条件 (例如 Szetlel (2006-A, 2006-B), Xu and Han (2006), Xu, Han and Wu (2007))。寻找和构造人工边界条件的技巧和方法呈现多样化的发展趋势，并日趋成熟。人工边界方法在科学技术的众多领域中得到了广泛的应用。

人工边界条件可分为显式人工边界条件和隐式人工边界条件两大类。显式人工边界条件又可分为整体人工边界条件，局部人工边界条件和离散人工边界条件三个小类。整体人工边界条件一般是在人工边界上由包含未知函数及其微商的积分等式给出，大多数问题的准确人工边界条件都是整体人工边界条件。在实际计算中应用整体人工边界条件需要较大的计算量和内存，特别对发展方程在实际计算中需要存储计算时刻以前的所有历史数据。对长时间的计算问题，由于计算量和内存量过大必须研究快速算法。对无界区域上椭圆型偏微分方程的数值求解，

整体人工边界条件常常是一个很好的选择。它可以很自然地与有限元方法耦合在一起。局部人工边界条件通常是由包含未知函数及其微商在人工边界上的等式给出。在一般情况下局部人工边界条件仅仅是原问题的准确人工边界条件的近似(一维声波方程是一个例外，它的准确人工边界条件是局部人工边界条件)。如果选用高精度的局部人工边界条件，则局部人工边界条件中将出现未知函数的高阶微商，这给数值计算带来了新的困难。局部人工边界条件经常被应用于线性和非线性波方程的数值计算。有时可直接将原问题在无界的物理区域上进行离散化，找出无界物理区域上的离散 (数值) 解在人工边界上满足的条件，然后可得到有界计算区域上的离散化问题。我们称这类离散 (数值) 解在人工边界上满足的边界条件为离散人工边界条件。隐式人工边界条件是由包含未知函数及其微商在人工边界上的隐式积分等式给出，大多数情况它直接来源于边界元与有限元方法的耦合公式。隐式人工边界条件的最大优点是对人工边界的形状没有任何限制。在实际问题中有时为了突出所选用人工边界条件的某种特殊性质，也赋予它们不同的名称，例如：吸收人工边界条件，无反射人工边界条件，开边界条件，透明人工边界条件，完全吸收人工边界条件，非线性人工边界条件等。

在人工边界方法快速发展的同时，人工边界方法的数学基础和理论分析也逐步建立了起来。对于二阶椭圆型方程，Navier (线弹性) 方程组和 Stokes 方程组外问题，得到了人工边界方法数值解的最优误差估计。进一步给出了误差对网格的尺度，人工边界的位置，人工边界条件精度的依赖关系。对热传导方程，Schrödinger 方程等发展方程的人工边界方法，得到了差分数值近似解的误差估计。

作者在多年研究工作的基础上同时汲取其他专家的研究成果写成本书。本书系统地介绍了人工边界方法的计算格式及其理论基础。它可以作为科学与工程计算专业研究生课程的教材，亦可以作为科学与工程计算专业科学技术人员的参考书。

第 1 章　二阶椭圆型方程外问题的整体人工边界条件

在这一章中我们讨论典型的二阶椭圆型方程外问题的整体人工边界条件。

1.1　二阶椭圆型方程的外问题

设 $\Omega_0 \subset R^n (n=2,3)$ 为一个有界开区域，其边界 Γ 满足 Lipschitz 条件。令 $\Omega = R^n \backslash \bar{\Omega}_0$ 为无界的外区域，其边界亦为 Γ。在外区域 Ω 上考虑下面二阶线性椭圆型方程的边值问题：

$$-\Delta u + \beta^2 u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.1.1}$$

$$u|_\Gamma = g(x), \tag{1.1.2}$$

$$\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \text{ 满足适当的无穷远条件,} \tag{1.1.3}$$

其中 β 为已知常数，$f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 Ω 和 Γ 上的已知函数，并且 $f(x)$ 的支集是紧的，即存在 $R_0 > 0$，使 $\mathrm{Supp}\{f(x)\} \subset B_0$ $(B_0 = \{x \mid |x| \leqslant R_0\})$。记 $\Gamma_0 = \{x \mid |x| = R_0\}$，不妨设 $\Gamma_0 \subset \Omega$，这里引进的区域 Ω_0, Ω，及其相关假设，在以后各章中也是成立的。当 $\beta = 0$ 时方程 (1.1.1) 就是著名的 Poisson 方程。在二维与三维情况下 Poisson 方程外问题在无穷远处的条件是不同的。二维 Poisson 方程外问题的提法为：

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ u|_\Gamma = g(x), \\ \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \text{ 有界.} \end{cases}$$

三维 Poisson 方程外问题有两种不同的提法：

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ u|_\Gamma = g(x), \\ \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \to 0. \end{cases}$$

$$
\text{(III)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = g(x), \\ \displaystyle\int_{\Gamma_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}s = 0, & \forall \rho > R_0. \end{cases}
$$

其中，$\Gamma_\rho = \{x \mid |x| = \rho\}, \dfrac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 在 Γ_ρ 上的外法向微商。

当 β 为非零实数时，方程 (1.1.1) 被称为修正的 Helmholtz 方程。修正的 Helmholtz 方程外问题 $(n = 2, 3)$ 的提法为：

$$
\text{(IV)} \qquad \begin{cases} -\Delta u + \beta^2 u = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = g(x), \\ \text{当 } |x| \to \infty \text{时}, u \to 0. \end{cases}
$$

当 β 为纯虚数时，即 $\beta = \mathrm{i}k$ (k 是正实数)，方程 (1.1.1) 被称为 Helmholtz 方程。Helmholtz 方程无穷远处的条件为 Sommerfeld 辐射条件，它的外边值问题的提法为：

$$
\text{(V)} \qquad \begin{cases} -\Delta u - k^2 u = f(x), & \forall x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = g(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku = o\Big(\dfrac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}}\Big), & r \to \infty. \end{cases}
$$

其中 $r = |x|$。

上述五个二阶椭圆型方程边值问题都是定义在无界的外区域 Ω 上。在函数 $f(x), g(x)$ 满足一定光滑性条件下，问题 (Ⅰ)～(Ⅴ) 都是适定的。它们描述的是科学与工程计算中常遇到的问题，都具有很强的物理和工程背景。为了克服区域的无界性给这些问题的数值求解带来的本质性困难，在物理区域 Ω 上引进人工边界，例如在上述问题中可取人工边界为：

$$
\Gamma_R = \{x \mid |x| = R\}, \tag{1.1.4}
$$

其中 $R > R_0$ 为一正实数，$\Gamma_R \subset \Omega$ 。在二维情况下 Γ_R 是以原点为中心，R 为半径的圆周；在三维情况下 Γ_R 是以原点为中心，R 为半径的球面。在实际应用时，人工边界也可取为多边形的边界 (二维问题)，或多面体的表面 (三维问题)。人工边界 Γ_R 将区域 Ω 分割为两部分，无界区域 $\Omega_e = \{x \mid |x| > R\}$ 和有界的计算区域 $\Omega_i = \Omega \backslash \bar{\Omega}_e$。有界计算区域 Ω_i 的边界为 $\partial\Omega_i = \Gamma \cup \Gamma_R$。对给定的问题如果我们能在人工边界 Γ_R 上找出未知函数 $u(x)$ 满足的准确的边界条件或者构造出“合适的”近似人工边界条件，我们可以将定义于无界区域 Ω 上的边值问题

归化为定义于有界计算区域 Ω_i 上的边值问题，并在有界计算区域 Ω_i 上求其数值解。这是人工边界方法求解无界区域上偏微分方程数值解的基本过程。下面通过二维 Poisson 方程的外问题（Ⅰ）对这个过程进行进一步的说明。对于引进的人工边界 Γ_R，如何找出未知函数 $u(x)$ 在 Γ_R 上满足的准确的边界条件或者“合适”的近似人工边界条件？一个自然的想法是将未知函数在无穷远处满足的边界条件移到人工边界 Γ_R 上。在问题（Ⅰ）中无穷远处的条件是当 $r=|x|\to\infty$ 时 $u(x)$ 有界。由于在无穷远处的界是待定的，不能直接将这个条件移置到人工边界上。从偏微分方程的理论知道问题（Ⅰ）的解 $u(x)$ 在无穷远处满足：

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial u}{\partial r}=0. \tag{1.1.5}$$

将条件 (1.1.5) 移置到人工边界 Γ_R 上，我们得到 Γ_R 上的一个人工边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=0. \tag{1.1.6}$$

其中 n 表示区域 Ω_i 在 Γ_R 上的单位外法向量。

应用边界条件 (1.1.6) 可将问题（Ⅰ）简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题：

$$(\mathrm{I}_i)\qquad \begin{cases} -\Delta u_i=f(x), \quad \forall x\in\Omega_i,\\ u_i|_{\Gamma}=g(x),\\ \left.\dfrac{\partial u_i}{\partial r}\right|_{\Gamma_R}=0. \end{cases}$$

下面我们检查一下条件 (1.1.6) 是否满足“合适的”人工边界条件的基本要求。从偏微分方程的理论可知简化问题（I_i）存在唯一的解 $u_i(x)$，并且解 $u_i(x)$ 对已知函数 $f(x),g(x)$ 是连续依赖的，因而条件 (1.1.6) 满足绪论中提出的第一个基本要求。进一步考察简化问题的解 $u_i(x)$ 在区域 Ω_i 是原问题的解 $u(x)$ 的一个“很好”的近似吗？从下面例子可以看出 $u_i(x)$ 在 Ω_i 上仅是 $u(x)$ 的一个很粗糙的近似。在问题（Ⅰ）中取 $\Gamma=\{x\mid |x|=1\}$，$f(x)\equiv 0$，$g(x)=1-\cos\theta$，这里 (r,θ) 为极坐标，此时问题（Ⅰ）的解为：

$$u(x)=1-\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2},$$

对应的简化问题（I_i）的解为：

$$u_i(x)=1-\frac{R^2x_1}{(R^2+1)(x_1^2+x_2^2)}-\frac{x_1}{R^2+1},$$

$u(x)$ 与 $u_i(x)$ 在 $\bar{\Omega}_i$ 上的误差为：

$$E(x)=u(x)-u_i(x)=-\frac{x_1}{(R^2+1)(x_1^2+x_2^2)}+\frac{x_1}{R^2+1}.$$

误差 $E(x)$ 在 Ω_i 上满足 Laplace 方程并且 $E(x)|_\Gamma = 0$，$E(x)$ 在 $\bar{\Omega}_i$ 上的最大值和最小值在人工边界 Γ_R 上达到。我们可得误差 $E(x)$ 在 Ω_i 上的最大模为：

$$\max_{\bar{\Omega}_i} |E(x)| = \frac{R^2-1}{R(R^2+1)}, \quad R > 1.$$

原问题的解 $u(x)$ 在 Ω_i 上的最大模为：

$$\max_{\bar{\Omega}_i} |u(x)| = 2.$$

相对误差为：

$$\varepsilon = \frac{R^2-1}{2R(R^2+1)} \simeq \frac{1}{2R}.$$

从这个例子可以看出应用人工边界条件 (1.1.6) 将问题 (I) 进行简化，简化问题 (I_i) 的精度依赖于人工边界的位置；要得到高精度的近似解 $u_i(x)$，人工边界的位置必远离坐标原点，也就是说有界的计算区域 Ω_i 必须很大，这仍然需要相当大的计算量和存储量。因而将原问题的解在无穷远处满足的条件简单地移植到人工边界上不能克服区域的无界性给数值计算带来的本质困难。人工边界方法的基本思想是对给定的问题通过引进人工边界将原问题简化为在尽可能小的有界计算区域上进行数值计算。它的核心技术是对给定的问题在人工边界上如何找出原问题的解满足的准确边界条件或设计出高精度的近似人工边界条件。本书将系统地介绍人工边界方法的核心技术，它的数学基础及其在科学与工程计算中的应用。

1.2 二维 Poisson 方程外问题的整体人工边界条件

我们考虑问题 (I)：

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.2.1}$$

$$u|_\Gamma = g(x), \tag{1.2.2}$$

$$\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \text{ 有界}. \tag{1.2.3}$$

引进人工边界 $\Gamma_R = \{x \mid |x| = R\}, R > R_0$。$\Gamma_R$ 将 Ω 分割为有界的计算区域 Ω_i 和无界区域 Ω_e (见图 1-1)。无界区域 Ω_e 是一个很规则的区域，它是以原点为中心，R 为半径的圆盘的外部。问题 (1.2.1)~(1.2.3) 的解在 Ω_i 上满足：

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.2.4}$$

$$u|_\Gamma = g(x), \tag{1.2.5}$$

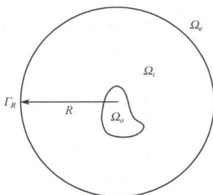


图 1-1　无界区域外问题

在 Ω_e 上满足：

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{1.2.6}$$

$$\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \text{ 有界} \tag{1.2.7}$$

在人工边界 Γ_R 上满足连续性条件：

$$[u]_{\Gamma_R} = 0, \tag{1.2.8}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Gamma_R} = 0. \tag{1.2.9}$$

虽然问题 (1.2.4)~(1.2.5) 和问题 (1.2.6)~(1.2.7) 分别定义在区域 Ω_i 和 Ω_e 上，但其中的每一个问题的提法都是不完全的，不能分别在有界的计算区域 Ω_i 和无界区域 Ω_e 上求解。为了能够在有界的计算区域 Ω_i 上对原问题独立进行求解，我们需要研究在人工边界上原问题的解 $u(x)$ 满足的边界条件。

1.2.1　Laplace 方程外问题的 Steklov-Poincaré 映射

考虑问题 (1.2.6)~(1.2.7)，如果 u 在人工边界上的值 $u(R,\theta)$ 已知，即：

$$u|_{\Gamma_R} = u(R,\theta). \tag{1.2.10}$$

则 Laplace 方程外问题 (1.2.6)，(1.2.7)，(1.2.10) 存在唯一解 $u(r,\theta)$，对给定的 $u(R,\theta)$，$u(r,\theta)$ 可以表示为下面的傅氏级数：

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad R \leqslant r < \infty, \tag{1.2.11}$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{1.2.12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{1.2.13}$$

在人工边界 Γ_R 上:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{R}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta).$$

将 a_n, b_n 的表达式 (1.2.12)~(1.2.13) 代入上式得:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\pi R}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &\equiv S_1(u|_{\Gamma_R}).\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

对上式分部积分可得:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial\varphi}\sin n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &\equiv S_2(u|_{\Gamma_R}).\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n R}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial\varphi^2}\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &\equiv S_3(u|_{\Gamma_R}).\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

公式 (1.2.14), (1.2.15), (1.2.16) 是等价的, 它们是 Laplace 外问题 Steklov-Poincaré 映射的级数形式。由等式 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980, p.44)

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = -\ln 2(1-\cos\theta) \equiv f_0(\theta), \tag{1.2.17}$$

可得到 $f_0(\theta)$ 的一阶, 二阶广义微商:

$$\frac{\mathrm{d}f_0(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}, \tag{1.2.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_0(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{1.2.19}$$

应用等式 (1.2.17), Steklov-Poincaré 映射的级数形式可以表示为下面的积分形式:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r} &= -\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\ln(1-\cos(\theta-\varphi))\frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial\varphi^2}\mathrm{d}\varphi \\ &\equiv S_4(u|_{\Gamma_R}).\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

进一步通过分部积分可得：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= -\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\cot\frac{(\theta\varphi)}{2}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &\equiv S_5(u|_{\Gamma_R}).\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\sin^2\frac{(\theta-\varphi)}{2}}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &\equiv S_6(u|_{\Gamma_R}).\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

事实上我们得到了 Laplace 方程外问题的 Steklov-Poincaré 映射的六个等价形式：式 (1.2.14)~(1.2.16) 和式 (1.2.20)~(1.2.22)，即对任给的 $u(R,\theta)\in H^{-1/2}(\Gamma_R)$ 在 Ω_e 上求解外问题 (1.2.4)~(1.2.6) 得到：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_R), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= S_j(u|_{\Gamma_R}),\quad j=1,2,\cdots,6,\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

其中 $H^{1/2}(\Gamma_R)$ 和 $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ 是定义于 Γ_R 的 Sobolev 空间 (Adams, 1975)。

公式 (1.2.22) 由冯康 (1980) 和余德浩 (1983) 用 Green 函数方法给出。韩厚德和应隆安 (1980) 应用 Hilbert 变换求解积分方程得到了公式 (1.2.20)~(1.2.21)。公式 (1.2.14)~(1.2.16) 由韩厚德和巫孝南 (1985-A) 给出，同时余德浩 (1985) 也得到了公式 (1.2.14)。四年以后 Givoli 和 Keller (1989) 又得到了公式 (1.2.14)。他们称公式 (1.2.14) 为 DtN 映射 (Dirichlet to Neumann Mapping)。

Steklov-Poincaré 映射 (1.2.23) 就是我们寻找的外问题 (I) 的解 $u(x)$ 在人工边界上严格满足的边界条件，应用其中任何一个都可以将外问题 (I) 等价地简化为有界区域 Ω_i 上的边值问题。边界条件 (1.2.20) 包含带弱奇性核的积分，边界条件 (1.2.21) 包含 Cauchy 型积分，边界条件 (1.2.22) 包含带强奇性核的积分，边界条件 (1.2.14)~(1.2.16) 包含无穷级数。这些都给有界计算区域 Ω_i 上简化边值问题的数值计算带来新的困难，即需要处理奇异积分或者无穷级数。在实际计算时，可在准确边界条件 (1.2.14)~(1.2.16) 的右端级数中选取有限项 (例如前面 N 项) 作为近似。这样我们就得到了一系列高精度近似人工边界条件 ($N=0,1,2,\cdots$)：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} &= -\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{\pi R}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &\equiv S_1^N(u|_{\Gamma_R}).\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} = -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial\varphi}\sin n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$\equiv S_2^N(u|_{\Gamma_R}). \tag{1.2.25}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n R} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial \varphi^2} \cos n(\theta-\varphi) \mathrm{d}\varphi$$

$$\equiv S_3^N(u|_{\Gamma_R}). \tag{1.2.26}$$

对于同一个正整数 N，人工边界条件 (1.2.24)，(1.2.25) 和 (1.2.26) 是相互等价的。

1.2.2 有界计算区域 Ω_i 上的简化边值问题

应用人工边界 Γ_R 上的准确边界条件 (1.2.16) (或者 (1.2.14)，(1.2.15)，(1.2.20)~(1.2.22))，可将问题 (I) 简化为有界计算区域 Ω_i 上的等价边值问题：

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.2.27}$$

$$u|_{\Gamma} = g(x), \tag{1.2.28}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = S_3(u|_{\Gamma_R}). \tag{1.2.29}$$

应用人工边界条件 (1.2.26)，在有界计算区域 Ω_i 上得到近似的简化边值问题：

$$-\Delta u^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.2.30}$$

$$u^N|_{\Gamma} = g(x), \tag{1.2.31}$$

$$\left.\frac{\partial u^N}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = S_3^N(u^N|_{\Gamma_R}). \tag{1.2.32}$$

从 1.2.1 节的推导中可知如果 $u(x)$ 是问题 (1.2.1)~(1.2.3) 的解，则 $u(x)$ 在 Ω_i 上的限制是边值问题 (1.2.27)~(1.2.29) 的解。为了进一步讨论边值问题 (1.2.27)~(1.2.29) 的唯一性和近似边值问题 (1.2.30)~(1.2.32) 的适定性，在 Ω_i 上引进辅助函数 $u_0(x) \circ u_0(x)$ 由下面边值问题定义：

$$-\Delta u_0 = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.2.33}$$

$$u_0|_{\Gamma} = g(x), \tag{1.2.34}$$

$$u_0|_{\Gamma_R} = 0. \tag{1.2.35}$$

对于已知 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$，边值问题 (1.2.33)~(1.2.35) 存在唯一的解 $u_0(x) \in H^1(\Omega_i)$，这里 $H^\alpha(\Omega_i), H^\beta(\Gamma)$ (α, β 为实数) 表示通常的 Sobolev 空间 (Adams, 1975)。记 $h \equiv \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$ 并且存在一个常数 $C > 0$，使

$$\|h\|_{-1/2,\Gamma_R} \leqslant C\|g\|_{1/2,\Gamma}.$$

令：

$$w(x) = u(x) - u_0(x),$$
$$w^N(x) = u^N(x) - u_0(x),$$

由边值问题 (1.2.27)~(1.2.29) 和 (1.2.30)~(1.2.32) 可知：
$w(x)$ 满足：

$$-\Delta w = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.2.36}$$

$$w|_\Gamma = 0, \tag{1.2.37}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = S_3(w|_{\Gamma_R}) - h, \tag{1.2.38}$$

$w^N(x)$ 满足：

$$-\Delta w^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.2.39}$$

$$w^N|_\Gamma = 0, \tag{1.2.40}$$

$$\left.\frac{\partial w^N}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = S_3^N(w^N|_{\Gamma_R}) - h. \tag{1.2.41}$$

令：

$$V_0 = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_\Gamma = 0\},$$

V_0 是 $H^1(\Omega)$ 的子空间。边值问题 (1.2.36)~(1.2.38) 等价于变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } w \in V_0, \text{ 使} \\ a(w,v) + b(w,v) = (f,v) + < h, v >, \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \tag{1.2.42}$$

边值问题 (1.2.39)~(1.2.41) 等价于变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } w^N \in V_0, \text{ 使} \\ a(w^N,v) + b_N(w^N,v) = (f,v) + < h, v >, \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \tag{1.2.43}$$

其中，

$$a(w,v) = \int_{\Omega_i} \nabla w \cdot \nabla v \mathrm{d}x,$$

$$b(w,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n(\theta-\varphi) \frac{\partial w(R,\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial v(R,\theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta,$$

$$b_N(w,v) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n(\theta-\varphi) \frac{\partial w(R,\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial v(R,\theta)}{\partial \theta} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta,$$

$$(f,v)=\int_{\Omega_i} fv\mathrm{d}x,$$

$$<h,v>=\int_{\Gamma_R} hv\mathrm{d}x.$$

对于定义于 $V_0\times V_0$ 的双线性形式 $a(w,v)$, $b(w,v)$, $b_N(w,v)$ 有下面结果成立:

引理 1.2.1

(i) $a(w,v)$ 是定义于 $V_0\times V_0$ 上的对称有界双线性形式并且是强制的，即存在正常数 A,α，使

$$|a(w,v)|\leqslant A\|w\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i}\quad \forall w,v\in V_0, \tag{1.2.44}$$

$$a(v,v)\geqslant \alpha\|v\|^2_{1,\Omega_i}\quad \forall v\in V_0. \tag{1.2.45}$$

(ii) $b(w,v)$ 和 $b_N(w,v)$ 是定义于 $V_0\times V_0$ 上的对称有界双线性形式，即存在正常数 B，使

$$|b(w,v)|\leqslant B\|w\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i}\quad \forall w,v\in V_0, \tag{1.2.46}$$

$$|b_N(w,v)|\leqslant B\|w\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i}\quad \forall w,v\in V_0, \tag{1.2.47}$$

并且，

$$b(v,v)\geqslant 0,\quad b_N(v,v)\geqslant 0,\quad \forall v\in V_0.$$

证明

(i) 由 $a(w,v)$ 的定义可知 $a(w,v)$ 是定义于 $V_0\times V_0$ 上的对称有界双线性形式而且常数 A 取为 1。$\sqrt{a(v,v)}$ 是空间 $H^1(\Omega_i)$ 上的半模，在其子空间 V_0 上 $\sqrt{a(v,v)}$ 是一个等价模，由此可知 (1.2.45) 成立。

(ii) 为了研究双线性形式$b(w,v)$和$b_N(w,v)$的性质，我们首先讨论 Sobolev 空间 $H^s(\Gamma_R)$ 的一个等价模定义，其中 $s\geqslant 0$ 为实数。对任意 $w\in H^s(\Gamma_R)$, w 是定义于圆周 Γ_R 的周期函数。我们可将 w 展开为下面的傅氏级数:

$$w=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta). \tag{1.2.48}$$

w 属于 $H^s(\Gamma_R)$ 的充分必要条件是 w 的傅氏系数满足:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2s}(a_n^2+b_n^2)<\infty. \tag{1.2.49}$$

由条件 (1.2.49) 可以给出空间 $H^s(\Gamma_R)$ 的一个等价模与对应的半模 (Lions, 1971):

$$\|w\|_{s,\Gamma_R}=\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2s}(a_n^2+b_n^2)\right\}^{1/2},\quad \forall w\in H^s(\Gamma_R), \tag{1.2.50}$$

$$|w|_{s,\Gamma_R} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s}(a_n^2 + b_n^2) \right\}^{1/2}, \quad \forall w \in H^s(\Gamma_R).$$

对任意 $w, v \in V_0$ 我们讨论双线性形式 $b(w,v)$ 和 $b_N(w,v)$。将 $w|_{\Gamma_R}, v|_{\Gamma_R}$ 展开为下面傅氏级数:

$$w(R,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$v(R,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta).$$

在上式中分别对 φ, θ 求导数得到:

$$\frac{\partial w(R,\varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi),$$

$$\frac{\partial v(R,\theta)}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-c_n \sin n\theta + d_n \cos n\theta).$$

将上式代入 $b(w,v)$ 和 $b_N(w,v)$ 的表达式可得:

$$b(w,v) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n c_n + b_n d_n), \tag{1.2.51}$$

$$b_N(w,v) = \pi \sum_{n=1}^{N} n(a_n c_n + b_n d_n). \tag{1.2.52}$$

应用 Cauchy 不等式我们得到:

$$\begin{aligned} |b(w,v)| &\leqslant \pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) \right]^{1/2} \\ &= \pi |w|_{1/2,\Gamma_R} |v|_{1/2,\Gamma_R}. \end{aligned}$$

由迹定理 (Adams, 1975) 可知存在一个常数 $C_1 > 0$，使

$$\|w\|_{1/2,\Gamma_R} \leqslant C_1 \|w\|_{1,\Omega_i}, \quad \forall w \in V_0.$$

由上式直接可得不等式 (1.2.46)，其中常数 $B = \pi C_1^2$。类似地, 不等式 (1.2.47) 也成立。

由 $b(w,v)$ 和 $b_N(w,v)$ 的表达式 (1.2.51) 和 (1.2.52) 立即得到 $b(v,v) \geqslant 0$, $b_N(v,v) \geqslant 0, \forall v \in V_0$。引理证毕。■

应用引理 1.2.1 和 Lax-Milgram 定理 (Ciarlet, 1977) 我们得到:

定理 1.2.1　设 $f \in H^{-1}(\Omega_i)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ 则

(i) 变分问题 (1.2.42) 存在唯一解 $w \in V_0$，并且，

$$\|w\|_{1,\Omega_i} \leqslant C\{\|f\|_{-1,\Omega_i} + \|g\|_{1/2,\Gamma}\},$$

(ii) 变分问题 (1.2.43) 存在唯一解 $w^N \in V_0$，并且，

$$\left\|w^N\right\|_{1,\Omega_i} \leqslant C\{\|f\|_{-1,\Omega_i} + \|g\|_{1/2,\Gamma}\},$$

其中 $C>0$ 是一个不依赖于 N 的常数. ■

由定理 1.2.1 的结果可知简化边值问题 (1.2.27)~(1.2.29) 的解存在且唯一，而它与原问题 (1.2.1)~(1.2.3) 是等价的，即问题 (1.2.1)~(1.2.3) 的解 $u(x)$ 在有界计算区域 Ω_i 上的限制就是简化问题 (1.2.27)~(1.2.29) 的唯一解。从定理 1.2.1 中也可知道有界计算区域 Ω_i 的近似简化边值问题 (1.2.30)~(1.2.32) 是适定的。

1.2.3 近似简化边值问题 (1.2.30)~(1.2.32) 的有限元逼近

为了叙述上的简便，在这一节中假设 $g \equiv 0$, Γ 为一多角形的边界。在此条件下边值问题 (1.2.27)~(1.2.29) 和简化边值问题 (1.2.30)~(1.2.32) 分别等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in V_0, \text{ 使} \\ a(u,v)+b(u,v)=(f,v), \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \tag{1.2.53}$$

$$\begin{cases} \text{找 } u^N \in V_0, \text{ 使} \\ a(u^N,v)+b_N(u^N,v)=(f,v), \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \tag{1.2.54}$$

为了构造 V_0 的有限元子空间，对区域 $\bar{\Omega}_i$ 进行正则三角剖分 (Ciarlet, 1977)。由于圆周 Γ_R 是 Ω_i 的边界的一部分，对 $\bar{\Omega}_i$ 进行剖分后得到的三角形单元中有一部分是曲边三角形单元，记 $\mathcal{J}_h$ 为所有三角形单元组成的集合。$\mathcal{J}_h$ 满足：

(i)

$$\bar{\Omega}_i = \left(\cup_{K\in\mathcal{J}_h} K\right) \cup \left(\cup_{\tilde{K}\in\mathcal{J}_h} \tilde{K}\right),$$

其中 K 为三角形单元，$\tilde{K}$ 为曲边三角形，它的一条曲边在人工边界 Γ_R 上。

(ii)

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leqslant \sigma, \quad \forall K, \tilde{K} \in \mathcal{J}_h,$$

其中 $\sigma>0$ 为一常数，h_K 为三角形单元的直径，ρ_K 为三角形单元的内接圆的直径，并且

$$h = \max_{K,\tilde{K}\in\mathcal{J}_h} \{h_K\}.$$

在区域 Ω_i 上引进 V_0 的有限元子空间 V_0^h：

$$V_0^h = \{v \mid v \in V_0;\ v|_K \text{ 和} v|_{\tilde{K}} \text{ 是线性函数}, \forall K, \tilde{K} \in \mathcal{J}_h\}.$$

在变分问题 (1.2.54) 中用 V_0^h 代替 V_0 我们得到了近似简化问题的有限元逼近：

$$\begin{cases} \text{找 } u_h^{N,R} \in V_0^h, \text{ 使} \\ a(u_h^{N,R}, v) + b_N(u_h^{N,R}, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_0^h. \end{cases} \tag{1.2.55}$$

由引理 1.2.1 和 Lax-Milgram 定理可知变分问题 (1.2.55) 存在唯一解 $u_h^{N,R}$，通过数值计算可得 $u_h^{N,R}$。在实际工程应用中，总是用 $u_h^{N,R}$ 近似原问题 (1.2.1)~(1.2.3) 的解 u。那么 u 与 $u_h^{N,R}$ 之间的误差有多大？这个误差如何依赖于有限元网格的尺度 (h)，人工边界条件的精度 (N) 和人工边界的位置 (R)？都是人们十分关心的问题。我们在论文 (Han and Wu, 1985-A) 中给出了误差 $u - u_h^{N,R}$ 对 h 和 N 的依赖关系，但是误差对 R (人工边界的位置) 的依赖关系隐藏在估计式的常数中，没有显式关系。在论文 (Han and Bao, 2000) 中，我们进一步得到了误差 $u - u_h^{N,R}$ 对 R 的依赖关系。下面的主要内容来源于论文 (Han and Wu, 1985-A) 和论文 (Han and Bao, 2000)。首先证明引理：

引理 1.2.2　设 u 是边值问题 (1.2.1)~(1.2.3) 的解 (其中 $g = 0$) 并且 $u|_{\Gamma_0} \in H^{k-1/2}(\Gamma_0), k \geqslant 1$，则对任意 $v \in V_0$，下面估计式成立：

$$|b(u, v) - b_N(u, v)| \leqslant \frac{1}{(N+1)^{k-1}} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1} |u|_{k-1/2,\Gamma_0} |v|_{1/2,\Gamma_0}. \tag{1.2.56}$$

证明　我们将 $u|_{\Gamma_0} = u(R_0, \theta)$ 展开为傅氏级数：

$$u(R_0, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

由于 u 是边值问题 (1.2.1)~(1.2.3) 的解，在区域 $R^2 \backslash B_0$ 上 u 满足 Laplace 方程 $\Delta u = 0$。u 可展开为下面的级数：

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad r \geqslant R_0. \tag{1.2.57}$$

对于任给 $v \in V_0$，在 Γ_R 上 v 可展为傅氏级数：

$$v(R, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta). \tag{1.2.58}$$

将 (1.2.57)，(1.2.58) 代入 $b(u, v)$，$b_N(u, v)$ 的表达式 (1.2.51)~(1.2.52) 我们得到：

$$
\begin{aligned}
|b(u,v)-b_N(u,v)| &= \pi\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} n\left(\frac{R_0}{R}\right)^n (a_nc_n+b_nd_n)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi n^k(|a_nc_n|+|b_nd_n|) \\
&\leqslant \frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi n^{2k-1}(a_n^2+b_n^2)\right)^{1/2} \\
&\quad\cdot\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi n(c_n^2+d_n^2)\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{k-1/2,\Gamma_0}|v|_{1/2,\Gamma_R}.
\end{aligned}
$$

引理获证。 ∎

引理 1.2.3 对任意 $v\in V_0$，下面的迹定理成立：

$$
|v|_{1/2,\Gamma_R}\leqslant\frac{1}{\pi}|v|_{1,\Omega_i},\quad \forall v\in V_0. \tag{1.2.59}
$$

证明 对任给函数 $v\in V_0$，在 $B_R=\{x\mid |x|\leqslant R\}$ 上定义函数 $\tilde{v}$:

$$
\tilde{v}=\begin{cases} v, & x\in\bar{\Omega}_i, \\ 0, & x\in\Omega_0, \end{cases}
$$

则函数 $\tilde{v}\in H^1(B_R)$，并且，

$$
\int_{\Omega_i}|\nabla v|^2\mathrm{d}x=\int_{B_R}|\nabla\tilde{v}|^2\mathrm{d}x.
$$

在区域 B_R 上考虑下面的边值问题：

$$
\begin{cases} \Delta v^*(x)=0, & \forall x\in B_R, \\ v^*(x)=v(x), & \forall x\in\Gamma_R. \end{cases} \tag{1.2.60}
$$

边值问题 (1.2.60) 存在唯一解，并且，

$$
\int_{B_R}|\nabla v^*|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{B_R}|\nabla\tilde{v}|^2\mathrm{d}x=\int_{\Omega_i}|\nabla v|^2\mathrm{d}x. \tag{1.2.61}
$$

应用 v 在 Γ_R 上的傅氏级数展开式 (1.2.58) 可得 v^* 的级数表达式：

$$
v^*(r,\theta)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta). \tag{1.2.62}
$$

将上式代入不等式 (1.2.61) 的左端，我们得到：

$$
\begin{aligned}
\int_{B_R}|\nabla v^*|^2\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial r}\right)^2+r^{-2}\left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta}\right)^2\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{n^2r^{2n-2}}{R^{2n}}(c_n^2+d_n^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^R\frac{n^2r^{2n-1}}{R^{2n}}(c_n^2+d_n^2)\mathrm{d}r \\
&= \pi\sum_{n=1}^{\infty}n(c_n^2+d_n^2) \\
&= \pi|v^*|_{1/2,\Gamma_R}^2=\pi|v|_{1/2,\Gamma_R}^2.
\end{aligned}
$$

由不等式 (1.2.61) 可立刻得到引理 1.2.3 的结论。 ■

对于误差 $u-u_h^{N,R}$ 有下面的估计式成立：

定理 1.2.2 设 u 是变分问题 (1.2.53) 的解，$u\in V_0$ 并且 $u|_{\Gamma_0}\in H^{k-1/2}(\Gamma_0)$, $k\geqslant 1$, 则下面的误差估计成立：

$$
\left|u-u_h^{N,R}\right|_{1,\Omega_i}\leqslant 3\inf_{v\in V_0^h}|u-v|_{1,\Omega_i}+\frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{k-1/2,\Gamma_0}. \tag{1.2.63}
$$

证明 将变分等式 (1.2.53) 与变分等式 (1.2.55) 相减可得：

$$
a(u-u_h^{N,R},v)+b_N(u-u_h^{N,R},v)=b_N(u,v)-b(u,v),\quad \forall v\in V_0^h. \tag{1.2.64}
$$

对任意 $v\in V_0^h$，

$$
\begin{aligned}
a(v-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})&\leqslant a(v-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})+b_N(v-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R}) \\
&=a(u-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})+b_N(u-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R}) \\
&\quad +a(v-u,v-u_h^{N,R})+b_N(v-u,v-u_h^{N,R})
\end{aligned} \tag{1.2.65}
$$

由于 $v-u_h^{N,R}\in V_0^h$，应用等式 (1.2.64) 和估计式 (1.2.56) 可得：

$$
\begin{aligned}
&|a(v-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})+b_N(u-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})| \\
&=|b(u,v-u_h^{N,R})-b_N(u,v-u_h^{N,R})| \\
&\leqslant\frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{k-1/2,\Gamma_0}\left|v-u_h^{N,R}\right|_{1/2,\Gamma_R}
\end{aligned} \tag{1.2.66}
$$

应用双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$, $b_N(\cdot,\cdot)$ 的定义，及等式 (1.2.52) 和不等式 (1.2.59) 我们得到：

$$\left|a(v-u,v-u_h^{N,R})+b_N(v-u,v-u_h^{N,R})\right| \leqslant 2|v-u|_{1,\Omega_i}\left|v-u_h^{N,R}\right|_{1,\Omega}. \tag{1.2.67}$$

综合估计式 (1.2.65)~(1.2.67), 即有:

$$\left|v-u_h^{N,R}\right|_{1,\Omega_i} \leqslant \frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{k-1/2,\Gamma_0}+2|v-u|_{1,\Omega_i}, \quad \forall v\in V_0^h. \tag{1.2.68}$$

再应用三角不等式，得到如下估计:

$$\begin{aligned}\left|u-u_h^{N,R}\right|_{1,\Omega_i} &\leqslant |u-v|_{1,\Omega_i}+\left|v-u_h^{N,R}\right|_{1,\Omega_i}\\ &\leqslant \frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{k-1/2,\Gamma_0}+3|u-v|_{1,\Omega_i}, \quad \forall v\in V_0^h.\end{aligned}$$

由 $v\in V_0^h$ 的任意性可直接得到定理 1.2.2 的结论，即估计式 (1.2.63) 成立。 ■

从估计式 (1.2.63) 中我们可以十分清晰地看到误差 $u-u_h^{N,R}$ 是如何依赖于有限元网格的尺度 (h), 人工边界条件的精度 (N) 和人工边界的位置 (R)。

推论 对于我们选用的正则剖分 $\mathcal{J}_h$ 和线性三角形单元，进一步假设问题 (1.2.53) 的解 $u\in H^2(\Omega_i)\cap H^{k-1/2}(\Gamma_0)$，则

$$\inf_{v\in V_0^h}|u-v|_{1,\Omega_i}\leqslant Ch|u|_{2,\Omega_i},$$

其中 $C>0$ 是一个不依赖于 h, N 的常数。由估计式 (1.2.63) 可得有限元近似解 $u_h^{N,R}$ 的误差估计:

$$\left|u-u_h^{N,R}\right|_{1,\Omega_i}\leqslant 3Ch|u|_{2,\Omega_i}+\frac{1}{(N+1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{k-1/2,\Gamma_0}. \quad ■ \tag{1.2.69}$$

1.3 三维 Poisson 方程外问题的整体人工边界条件

这一节中我们讨论三维 Poisson 方程外问题 (II) 和 (III) 的整体人工边界条件，本节的主要内容来源于论文 (Han, He and Wu, 2000)。

1.3.1 球面人工边界 Γ_R 上的准确边界条件和近似人工边界条件

首先我们讨论三维 Poisson 方程外问题 (II):

$$-\Delta u=f(x),\quad \forall x\in\Omega, \tag{1.3.1}$$

$$u|_\Gamma=g(x), \tag{1.3.2}$$

$$\text{当 } |x|\to\infty \text{ 时}, u\to 0. \tag{1.3.3}$$

其中 $\Omega \subset R^3$ 是一个外区域，其边界 Γ 是一个有界闭曲面满足 Lipschitz 条件；$f(x)$, $g(x)$ 为已知函数，$f(x)$ 满足 1.1 节中的条件。引进人工边界：

$$\Gamma_R = \{x \mid |x| = R,\ R > R_0\}. \tag{1.3.4}$$

球面人工边界 Γ_R 将 Ω 分割为两部分：有界部分 Ω_i 和无界部分 Ω_e，即：

$$\Omega_i = \{x \mid x \in \Omega,\ 并且|x| < R\},$$
$$\Omega_e = \Omega \backslash \bar{\Omega}_i.$$

在区域 Ω_e 上外问题 (1.3.1)~(1.3.3) 的解 $u(x)$ 满足：

$$-\Delta u = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{1.3.5}$$

$$u|_{\Gamma_R} = u(R, \theta, \varphi), \tag{1.3.6}$$

$$当\ |x| \to \infty\ 时, u \to 0. \tag{1.3.7}$$

其中 $u(R, \theta, \varphi)$ 是外问题 (1.3.1)~(1.3.3) 的解 $u(x)$ 在人工边界 Γ_R 上的值，它是未知的。(r, θ, φ) 是 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 的球坐标。如果已知 $u(R, \theta, \varphi)$，则问题 (1.3.5)~(1.3.7) 存在唯一解。将 $u(R, \theta, \varphi)$ 展开为无穷级数：

$$u(R, \theta, \varphi) = \frac{c_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{n0}}{2} P_n^0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta)(c_{nm} \cos m\varphi + d_{nm} \sin m\varphi) \right], \tag{1.3.8}$$

其中 $P_n^0(t)$ 是 n 阶 Legendre 多项式：

$$P_n^0(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n (t^2 - 1)^n}{\mathrm{d}t^n},$$

$P_n^m(t)$ 是 Legendre 函数：

$$P_n^m(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} P_n^0(t);$$

系数 c_{nm} 和 d_{nm} 由下式给出：

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u(R, \xi, \psi) P_n^m(\cos\xi) \cos m\psi \sin\xi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\psi \\ &\equiv \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)! R^2} \int_{\Gamma_R} u(y) P_n^m(\cos\xi) \cos m\psi \mathrm{d}s_y, \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

$$\begin{aligned} d_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u(R, \xi, \psi) P_n^m(\cos\xi) \sin m\psi \sin\xi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\psi \\ &\equiv \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)! R^2} \int_{\Gamma_R} u(y) P_n^m(\cos\xi) \sin m\psi \mathrm{d}s_y. \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

则问题 (1.3.5)~(1.3.7) 的解 $u(r,\theta,\varphi)$ 可由下式给出：

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{c_{00}}{2}\frac{R}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot\left[\frac{c_{n0}}{2}P_n^0(\cos\theta)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)(c_{nm}\cos m\varphi+d_{nm}\sin m\varphi)\right],$$

由上式可得：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R}=-\frac{c_{00}}{2R}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n+1}{R}\right)$$
$$\cdot\left[\frac{c_{n0}}{2}P_n^0(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)(c_{nm}\cos m\varphi+d_{nm}\sin m\varphi)\right].\tag{1.3.11}$$

将 $\{c_{nm},\ d_{nm}\}$ 的表达式 (1.3.9), (1.3.10) 代入上式可得：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=-\frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\xi,\psi)\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\psi$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\xi,\psi)$$
$$\cdot\left[P_n^0(\cos\xi)P_n^0(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right.$$
$$\left.\cdot P_n^m(\cos\xi)P_n^m(\cos\theta)\cos m(\psi-\varphi)\right]\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\psi.\tag{1.3.12}$$

进一步由 Legendre 函数的加法定理 (Gradshteyn and Ryzhik, 1980)

$$P_n(\cos\gamma)=P_n^0(\cos\xi)P_n^0(\cos\theta)$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\xi)P_n^m(\cos\theta)\cos m(\psi-\varphi),\tag{1.3.13}$$

其中 $P_n(t)=P_n^0(t)$,

$$\cos\gamma=\cos\xi\cos\theta+\sin\xi\sin\theta\cos(\psi-\varphi),$$

可将 (1.3.12) 简化为：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=-\frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\xi,\psi)\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\psi$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(R,\xi,\psi)P_n(\cos\gamma)\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\psi$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u(y)\mathrm{d}s_y - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u(y)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_y \\
&= -\frac{1}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u(y)\mathrm{d}s_y + H(u|_{\Gamma_R}),
\end{aligned}
\tag{1.3.14}
$$

其中，

$$
H(u|_{\Gamma_R}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u(y)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_y. \tag{1.3.15}
$$

边界条件 (1.3.14) 是三维 Poisson 方程外问题 (1.3.1)~(1.3.3) 的解在人工边界 Γ_R 上满足的准确边界条件。在实际计算中在准确边界条件右端的无穷级数中取前面 N 项可得一系列近似人工边界条件 ($N = 1, 2, \cdots$)：

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = -\frac{1}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u(y)\mathrm{d}s_y + H^N(u|_{\Gamma_R}), \tag{1.3.16}
$$

其中，

$$
H^N(u|_{\Gamma_R}) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u(y)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_y. \tag{1.3.17}
$$

进一步考虑三维 Poisson 方程外问题 (III)：

$$
-\Delta u = f(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.3.18}
$$

$$
u_\Gamma = g(x), \tag{1.3.19}
$$

$$
\int_{\Gamma_\rho}\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \forall \rho > R_0. \tag{1.3.20}
$$

注意到三维 Poisson 方程外问题 (III) 与问题 (II) 在无穷远处所满足条件的差异，通过类似的讨论可得三维 Poisson 方程外问题 (III) (问题 (1.3.18)~(1.3.20)) 的解 $u(x)$ 在人工边界 Γ_R 上满足的准确边界条件和近似人工边界条件：

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = H(u|_{\Gamma_R}), \tag{1.3.21}
$$

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = H^N(u|_{\Gamma_R}), \quad (N = 0, 1, \cdots). \tag{1.3.22}
$$

1.3.2 有界计算区域 Ω_i 上的等价和近似边值问题

应用准确边界条件 (1.3.14) 和近似人工边界条件 (1.3.16) 可将三维 Poisson 方程的外问题 (1.3.1)~(1.3.3) 简化为有界区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.3.23}$$

$$u|_\Gamma = g(x), \tag{1.3.24}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = -\frac{1}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u(y)\mathrm{d}s_y + H(u|_{\Gamma_R}), \tag{1.3.25}$$

和

$$-\Delta u^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.3.26}$$

$$u^N|_\Gamma = g(x), \tag{1.3.27}$$

$$\left.\frac{\partial u^N}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = -\frac{1}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R} u^N(y)\mathrm{d}s_y + H^N(u|_{\Gamma_R}), \tag{1.3.28}$$

在 Sobolev 空间 $H^1(\Omega_i)$ 中引进集合 V_g 和子空间 V_0：

$$V_g = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_\Gamma = g, \forall g \in H^{1/2}(\Gamma)\},$$

$$V_0 = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_\Gamma = 0\},$$

则边值问题 (1.3.23)~(1.3.25) 和边值问题 (1.3.26)~(1.3.28) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in V_g, \text{ 使} \\ a(u,v) + b(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \tag{1.3.29}$$

和

$$\begin{cases} \text{找 } u^N \in V_g, \text{ 使} \\ a(u^N,v) + b_N(u^N,v) = (f,v), \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \tag{1.3.30}$$

其中，

$$a(u,v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x, \tag{1.3.31}$$

$$\begin{aligned} b(u,v) = &\frac{1}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R}\int_{\Gamma_R} u(x)\,v(y)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R}\int_{\Gamma_R} u(x)\,v(y)\,P_n(\cos\gamma)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y \end{aligned} \tag{1.3.32}$$

$$\begin{aligned} b_N(u,v) = &\frac{1}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R}\int_{\Gamma_R} u(x)\,v(y)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y \\ &+ \sum_{n=1}^{N}\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R^3}\int_{\Gamma_R}\int_{\Gamma_R} u(x)\,v(y)\,P_n(\cos\gamma)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y. \end{aligned} \tag{1.3.33}$$

下面进一步讨论双线性形式 $b(u,v)$, $b_N(u,v)$ 的性质。对任意 u, $v \in H^1(\Omega_i)$, 由迹定理 (Adams, 1975) 可知 $u|_{\Gamma_R}$, $v|_{\Gamma_R} \in H^{1/2}(\Gamma_R)$，将 $u|_{\Gamma_R}$, $v|_{\Gamma_R}$ 展开为无穷级数，$u|_{\Gamma_R}$ 由公式 (1.3.8) 给出，并且：

$$v|_{\Gamma_R} = v(R,\theta,\varphi) = \frac{e_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e_{n0}}{2}P_n^0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta)(e_{nm}\cos m\varphi + f_{nm}\sin m\varphi)\right], \tag{1.3.34}$$

其中，

$$e_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^2}\int_{\Gamma_R} v(x)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \mathrm{d}s_x,$$

$$f_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!R^2}\int_{\Gamma_R} v(x)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \mathrm{d}s_x.$$

将 $u|_{\Gamma_R}$, $v|_{\Gamma_R}$ 的表达式 (1.3.8), (1.3.34) 代入 $b(u,v)$, $b_N(u,v)$ 的表达式 (1.3.32)~(1.3.33) 我们得到：

$$b(u,v) = \pi R\left\{c_{00}e_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)c_{n0}e_{n0} + \sum_{m=1}^{n}\frac{2(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}(c_{nm}e_{nm} + d_{nm}f_{nm})\right]\right\}, \tag{1.3.35}$$

$$b_N(u,v) = \pi R\left\{c_{00}e_{00} + \sum_{n=1}^{N}\left[(n+1)c_{n0}e_{n0} + \sum_{m=1}^{n}\frac{2(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}(c_{nm}e_{nm} + d_{nm}f_{nm})\right]\right\}. \tag{1.3.36}$$

与二维情形类似，$u|_{\Gamma_R} \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ 的充分必要条件是：

$$b(u,u) = \pi R\left\{c_{00}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)c_{n0}^2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{2(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}(c_{nm}^2 + d_{nm}^2)\right]\right\} < \infty.$$

因而 $\|u|_{\Gamma_R}\| = \sqrt{b(u,u)}$ 是空间 $H^{1/2}(\Gamma_R)$ 的一个等价模。由 $b(u,v), b_N(u,v)$ 的表达式立刻可得：

$$|b(u,v)| \leqslant \| u|_{\Gamma_R} \| \, \| v|_{\Gamma_R} \| \leqslant M\|u\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i}, \tag{1.3.37}$$

$$|b_N(u,v)| \leqslant \| u|_{\Gamma_R} \| \, \| v|_{\Gamma_R} \| \leqslant M\|u\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i}, \tag{1.3.38}$$

其中 $M > 0$ 是一个不依赖于 N 的常数，即对双线性形式 $b(u,v)$, $b_N(u,v)$ 有下面引理：

引理 1.3.1 $b(u,v)$, $b_N(u,v)$ 是定义于 $H^1(\Omega_i) \times H^1(\Omega_i)$ 上的两个对称有界双线性形式，并且满足

$$b(v,v) \geqslant 0, \quad b_N(v,v) \geqslant 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega_i). \tag{1.3.39}$$

■

对于 $a(u,v)$ 我们有：

引理 1.3.2 $a(u,v)$ 是定义于 $H^1(\Omega_i) \times H^1(\Omega_i)$ 上的对称有界双线性形式，且存在常数 $\alpha > 0$，使

$$a(v,v) \geqslant \alpha \|v\|^2_{1,\Omega_i}, \quad \forall v \in V_0, \tag{1.3.40}$$

即 $a(u,v)$ 在 $V_0 \times V_0$ 上是强制的。 ■

由引理 1.3.1 和引理 1.3.2 的结果和 Lax-Milgram 定理 (Ciarlet, 1977) 可得：

定理 1.3.1 假设 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f \in H^{-1}(\Omega_i)$。则 (i) 变分问题 (1.3.29) 存在唯一解 $u(x) \in H^1(\Omega_i)$, $u(x)$ 就是三维 Poisson 方程外问题 (1.3.1)~(1.3.3) 的解在有界区域 Ω_i 上的限制。(ii) 对任给的正整数 N，变分问题 (1.3.30) 存在唯一解 $u^N(x) \in H^1(\Omega_i)$。 ■

定理 1.3.2 下面的误差估计式成立：

$$\|u - u^N\|_{1,\Omega_i} \leqslant \frac{C}{\alpha}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+3/2} \|u\|_{1/2,\Gamma_0}, \tag{1.3.41}$$

其中 $u(x)$, $u^N(x)$ 是变分问题 (1.3.29), (1.3.30) 的解， $C > 0$ 是一个不依赖于 N 的常数.

证明 令 $\epsilon^N(x) = u(x) - u^N(x)$，则 $\epsilon^N(x) \in V_0$ 并且满足：

$$a(\epsilon^N, v) + b_N(\epsilon^N, v) = b_N(u,v) - b(u,v), \quad \forall v \in V_0. \tag{1.3.42}$$

在 (1.3.42) 中取 $v = \epsilon^N(x)$ 并应用引理 1.3.1 和引理 1.3.2，可得：

$$\begin{aligned} \alpha \|\epsilon^N\|^2_{1,\Omega_i} &\leqslant a(\epsilon^N, \epsilon^N) + b_N(\epsilon^N, \epsilon^N) \\ &= b_N(u, \epsilon^N) - b(u, \epsilon^N). \end{aligned}$$

进一步有：

$$\|\epsilon^N\|_{1,\Omega_i} \leqslant \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V_0} \frac{|b_N(u,v) - b(u,v)|}{\|v\|_{1,\Omega_i}}. \tag{1.3.43}$$

其中 $u(x)$ 是变分问题 (1.3.29) 的解，也是三维 Poisson 方程外问题 (1.3.1)~(1.3.3) 的解. 在 $r \geqslant R_0$ 上 $u(x)$ 满足 Laplace 方程，将 $u(R_0,\theta,\varphi)$ 展开为级数：

$$u(R_0,\theta,\varphi) = \frac{a_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{a_{n0}}{2}P_n^0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\Big].$$

则问题 (1.3.29) 的解 $u(x)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}u(x) &= u(r,\theta,\varphi)\\ &= \frac{a_{00}}{2}\Big(\frac{R_0}{r}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{R_0}{r}\Big)^{n+1}\Big[\frac{a_{n0}}{2}P_n^0(\cos\theta)\\ &\quad + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\Big].\end{aligned}$$

在人工边界 Γ_R 上，

$$\begin{aligned}u|_{\Gamma_R} &= \frac{a_{00}}{2}\Big(\frac{R_0}{R}\Big) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{n+1}\Big[\frac{a_{n0}}{2}P_n^0(\cos\theta)\\ &\quad + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\Big].\end{aligned} \tag{1.3.44}$$

将 $u|_{\Gamma_R}$ 的表达式 (1.3.44) 和 $v|_{\Gamma_R}$ 的表达式 (1.3.34) 代入 $b(u,v)-b_N(u,v)$ 我们可得：

$$\begin{aligned}&|b(u,v)-b_N(u,v)|\\ =&\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi R\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{n+1}\Big\{(n+1)a_{n0}e_{n0} + \sum_{m=1}^{n}\frac{2(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\\ &\cdot(a_{nm}e_{nm}+b_{nm}f_{nm})\Big\}\Big|\\ \leqslant&\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi(RR_0)^{1/2}\Big\{(n+1)a_{n0}e_{n0}\\ &+\sum_{m=1}^{n}\frac{2(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}(a_{nm}e_{nm}+b_{nm}f_{nm})\Big\}\\ \leqslant&\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi R_0\Big[(n+1)a_{n0}^2\\ &+\sum_{m=1}^{n}\frac{2(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}(a_{nm}^2+b_{nm}^2)\Big]\Big\}^{1/2}\end{aligned}$$

$$\cdot\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi R\Big[(n+1)e_{n0}^2+\sum_{m=1}^{n}\frac{2(n+1)(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}(e_{nm}^2+f_{nm}^2)\Big]\Big\}^{1/2}$$
$$\leqslant\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\| u|_{\Gamma_0}\|\,\| v|_{\Gamma_R}\|\leqslant C\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\|u\|_{1/2,\Gamma_0}\|v\|_{1,\Omega_i}.$$

其中 C 是一个不依赖于 N 的常数。将上面估计式代入 (1.3.43) 的右端可马上得到定理 1.3.2。 ∎

1.3.3 变分问题 (1.3.30) 的有限元近似

在这一节中讨论变分问题 (1.3.30) 的有限元近似。为了叙述上的简便，假设 Γ 是一多面体的表面，并且 $g=0$。此时变分问题简化为：

$$\begin{cases}\text{找 } u^N\in V_0,\text{ 使}\\ a(u^N,v)+b_N(u^N,v)=(f,v),\quad \forall v\in V_0.\end{cases}\tag{1.3.45}$$

设 $V_0^h\subset V_0$ 是一个有限元子空间，考虑 (1.3.45) 的有限元近似：

$$\begin{cases}\text{找 } u_h^N\in V_0^h,\text{ 使}\\ a(u_h^N,v)+b_N(u_h^N,v)=(f,v),\quad \forall v\in V_0^h.\end{cases}\tag{1.3.46}$$

对于变分问题 (1.3.46) 有下面的结果成立：

定理 1.3.3 对任给的 $f\in H^{-1}(\Omega_i)$ 变分问题 (1.3.46) 存在唯一解 $u_h^N\in H^1(\Omega_i)$，并且有下面的误差估计：

$$\big\|u-u_h^N\big\|_{1,\Omega_i}\leqslant C\Big\{\inf_{v\in V_0}\|u-v\|_{1,\Omega_i}+\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\|u\|_{1/2,\Gamma_0}\Big\},\tag{1.3.47}$$

其中 $C>0$ 是一个不依赖于 N 和 h 的常数，u 是变分问题 (1.3.29) 的解。

证明 应用 Lax-Milgram 定理可知变分问题 (1.3.46) 存在唯一解 $u_h^N\in V_0^h$。下面估计误差 $u-u_h^N$，将变分等式 (1.3.29) 与变分等式 (1.3.46) 相减可得：

$$a(u-u_h^N,v)+b_N(u-u_h^N,v)=b_N(u,v)-b(u,v),\quad \forall v\in V_0^h.\tag{1.3.48}$$

对任意 $w\in V_0^h$ 我们有：

$$\begin{aligned}\alpha\big\|w-u_h^N\big\|_{1,\Omega_i}&\leqslant a(w-u_h^N,w-u_h^N)+b_N(w-u_h^N,w-u_h^N)\\ &=a(w-u,w-u_h^N)+b_N(w-u,w-u_h^N)+a(u-u_h^N,w-u_h^N)\\ &\quad+b_N(u-u_h^N,w-u_h^N).\end{aligned}\tag{1.3.49}$$

由等式 (1.3.48)

$$
\begin{aligned}
&|a(u-u_h^N,w-u_h^N)+b_N(u-u_h^N,w-u_h^N)| \\
=&|b_N(u,w-u_h^N)-b(u,w-u_h^N)| \\
\leqslant&\Big\{\sup_{w\in V_0^h}\frac{|b_N(u,w)-b(u,w)|}{\|w\|_{1,\Omega_i}}\Big\}\|w-u_h^N\|_{1,\Omega_i} \\
\leqslant&C\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\|u\|_{1/2,\Gamma_0}\|w-u_h^N\|_{1,\Omega_i},
\end{aligned}
\tag{1.3.50}
$$

其中 $C>0$ 是一个不依赖于 N 和 h 的常数。另一方面由 $a(u,v)$ 的定义和不等式 (1.3.38)，我们有:

$$
|a(w-u,w-u_h^N)\leqslant\|w-u\|_{1,\Omega_i}\|w-u_h^N\|_{1,\Omega_i}, \tag{1.3.51}
$$

$$
|b_N(w-u,w-u_h^N)\leqslant M\|w-u\|_{1,\Omega_i}\|w-u_h^N\|_{1,\Omega_i}. \tag{1.3.52}
$$

综合估计式 (1.3.49)~(1.3.52)，对于任意 $w\in V_0^h$ 我们得到:

$$
\|w-u_h^N\|_{1,\Omega_i}\leqslant\frac{1}{\alpha}\Big\{(1+M)\|w-u\|_{1,\Omega_i}+C\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\|u\|_{1/2,\Gamma_0}\Big\}. \tag{1.3.53}
$$

进一步由三角不等式我们得到:

$$
\begin{aligned}
\|u-u_h^N\|_{1,\Omega_i}\leqslant&\Big(1+\frac{1+M}{\alpha}\Big)\|w-u\|_{1,\Omega_i} \\
&+\frac{C}{\alpha}\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\|u\|_{1/2,\Gamma_0},\forall w\in V_0^h.
\end{aligned}
\tag{1.3.54}
$$

由此可马上得定理 1.3.2 的结论 (1.3.47)。 ■

附注 1.3.1　在实际应用中为了构造有限元子空间 V_0^h，首先对区域 Ω_i 进行正则剖分，记其为 $\mathcal{J}_h$。例如将 Ω_i 正则剖分为四面体单元和曲面四面体单元，即:

$$
\bar{\Omega}_i=\Big(\cup_{K\in\mathcal{J}_h}K\Big)\cup\Big(\cup_{K\in\mathcal{J}_h}\tilde{K}\Big),
$$

其中 K 表示 $\mathcal{J}_h$ 中的四面体单元，$\tilde{K}$ 表示 $\mathcal{J}_h$ 中的曲面四面体单元 ($\tilde{K}$ 的一个面是人工边界 Γ_R 的一部分，因而是曲面); h 表示 $\mathcal{J}_h$ 中 (曲面) 四面体单元的最大直径。应用协调线性四面体单元可构造有限元子空间 V_0^h:

$$
V_0^h=\Big\{v_h\mid v_h\in V_0\text{ 并且}v_h|_K\text{ 和}v_h|_{\tilde{K}}\text{ 是线性函数},\forall K,\tilde{K}\in\mathcal{J}_h\Big\}, \tag{1.3.55}
$$

并有逼近性质:

$$
\inf_{v\in V_0^h}\|u-v\|_{1,\Omega_i}\leqslant Ch|u|_{2,\Omega_i}, \tag{1.3.56}
$$

其中 C 是一个常数，不依赖于 h。此时有限元近似解 u_h^N 有估计式:

$$
\|u-u_h^N\|_{1,\Omega_i}\leqslant C\Big\{h|u|_{2,\Omega_i}+\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{N+3/2}\|u\|_{1/2,\Gamma_0}\Big\}, \tag{1.3.57}
$$

其中 C 是一个不依赖于 N 和 h 的常数。

附注 1.3.2 类似于前面的讨论，应用准确的边界条件 (1.3.21) 和近似人工边界条件 (1.3.22) 可将三维 Poisson 外问题 (III) 简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题，并得到有限元近似解及其误差估计。

1.4 修正 Helmholtz 方程的外问题

在这一节中我们讨论修正 Helmholtz 方程外问题 (IV) 的数值解：

$$-\Delta u + \beta^2 u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.4.1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{1.4.2}$$

$$\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时}, u \to 0. \tag{1.4.3}$$

其中 $\beta > 0, f(x)$ 满足 1.1 节中叙述的条件。

1.4.1 人工边界 Γ_R 上的整体人工边界条件 (二维情形)

在这一节中我们讨论二维情形，即 $\Omega \subset R^2$，人工边界 Γ_R 是一个圆周。问题 (1.4.1)~(1.4.3) 的解 $u(x)$ 在区域 Ω_e 上的限制满足：

$$-\Delta u + \beta^2 u = f(x), \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{1.4.4}$$

$$\text{当}|x| \to \infty \text{ 时}, u \to 0. \tag{1.4.5}$$

如果 $u(x)$ 在人工边界 Γ_R 上的值 $u(R,\theta)$ 已知，即：

$$u|_{\Gamma_R} = u(R,\theta),$$

则在区域 Ω_e 上 $u(x)$ 可以由 $u(R,\theta)$ 唯一确定，并且，

$$u(r,\theta) = \frac{K_0(\beta r)}{2K_0(\beta R)}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(\beta r)}{K_n(\beta R)}\{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\}, r \geqslant R, \tag{1.4.6}$$

其中 $K_n(\xi)$ 是第二类 n 阶修正的 Bessel 函数 (Andrews, 1992), 并且，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \tag{1.4.7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\sin n\varphi \mathrm{d}\varphi. \tag{1.4.8}$$

在人工边界 Γ_R 上：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r} &= \beta\frac{K_0'(\beta R)}{2K_0(\beta R)}a_0 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta K_n'(\beta R)}{K_n(\beta R)}\{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\}.\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

将 a_n, b_n 的表达式 (1.4.7), (1.4.8) 代入上式可得:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi + \beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n'(\beta R)}{\pi K_n(\beta R)} \cdot \int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.4.10}$$

对上式右端的积分进行分部积分可得 (1.4.10) 的两个等价形式:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi + \beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n'(\beta R)}{n\pi K_n(\beta R)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial\varphi}\sin n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{1.4.11}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi - \beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n'(\beta R)}{n^2\pi K_n(\beta R)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial\varphi^2}\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{1.4.12}$$

边界条件 (1.4.10)~(1.4.12) 是二维修正 Helmholtz 方程外问题在人工边界 Γ_R 上的准确边界条件。在这些边界条件右端的无穷级数中取前面 $N+1$ 项我们得到三组相互等价的近似人工边界条件 $(N=0,1,\cdots)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi + \beta\sum_{n=1}^{N}\frac{K_n'(\beta R)}{\pi K_n(\beta R)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{1.4.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi + \beta\sum_{n=1}^{N}\frac{K_n'(\beta R)}{n\pi K_n(\beta R)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial\varphi}\sin n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{1.4.14}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi - \beta\sum_{n=1}^{N}\frac{K_n'(\beta R)}{n^2\pi K_n(\beta R)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial\varphi^2}\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.4.15}$$

1.4.2 有界计算区域 Ω_i 上的简化边值问题

应用边界条件 (1.4.10) 和 (1.4.13) 可将二维修正的 Helmholtz 方程外问题简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\Delta u + \beta^2 u = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.4.16}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4.17}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = & \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)} \int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ & + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n'(\beta R)}{\pi K_n(\beta R)} \int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{1.4.18}$$

和

$$-\Delta u^N + \beta^2 u^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.4.19}$$

$$u^N|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4.20}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u^N}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = & \frac{\beta K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)} \int_0^{2\pi} u^N(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ & + \beta \sum_{n=1}^{N} \frac{K_n'(\beta R)}{\pi K_n(\beta R)} \int_0^{2\pi} u^N(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

它们的等价的变分问题为：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in V_0, \text{ 使} \\ a_\beta(u,v) + b_\beta(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{1.4.22}$$

和

$$\begin{cases} \text{找 } u^N \in V_0, \text{ 使} \\ a_\beta(u^N,v) + b_{\beta,N}(u^N,v) = (f,v), \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \tag{1.4.23}$$

其中 V_0 是 $H^1(\Omega_i)$ 的子空间，

$$V_0 = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_{\Gamma} = 0\},$$

$$a_\beta(u,v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \beta^2 \int_{\Omega_i} uv \,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}b_\beta(u,v) = & -\frac{\beta R K_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)v(R,\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta R K_n'(\beta R)}{\pi K_n(\beta R)} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)v(R,\theta)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

$$b_{\beta,N}(u,v) = -\frac{\beta RK_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)v(R,\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$-\sum_{n=1}^{N}\frac{\beta RK_n'(\beta R)}{\pi K_n(\beta R)}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)v(R,\theta)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

令:

$$z_n = \begin{cases} -\dfrac{\beta RK_n'(\beta R)}{K_n(\beta R)}, & n>0, \\ -\dfrac{\beta RK_0'(\beta R)}{2\pi K_0(\beta R)}, & n=0; \end{cases} \tag{1.4.24}$$

则:

$$b_\beta(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_n}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)v(R,\theta)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta, \tag{1.4.25}$$

$$b_{\beta,N}(u,v) = \sum_{n=0}^{N}\frac{z_n}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)v(R,\theta)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \tag{1.4.26}$$

由双线性形式 $a_\beta(u,v)$ 的定义直接可得:

引理 1.4.1　$a_\beta(u,v)$ 是定义于 $H^1(\Omega_i)\times H^1(\Omega_i)$ 上的有界双线性形式，并且，

$$a_\beta(u,v) \leqslant M_\beta\|u\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i},\quad \forall u,v\in H^1(\Omega_i), \tag{1.4.27}$$

$$a_\beta(v,v) \geqslant \alpha_\beta\|v\|_{1,\Omega_i}^2,\quad \forall v\in H^1(\Omega_i), \tag{1.4.28}$$

其中 $M_\beta=\max\{1,\beta\},\alpha_\beta=\min\{1,\beta\}$。■

为了研究双线性形式 $b_\beta(u,v), b_{\beta,N}(u,v)$ 的性质，我们讨论修正的 Bessel 函数 $I_n(r),K_n(r)$，有下面结果成立:

引理 1.4.2　对于修正的 Bessel 函数 $I_n(r),K_n(r)$ 有下面不等式成立:

$$0<K_n(r)<K_{n+1}(r),\ 0<I_{n+1}(r)<I_n(r),\ \forall r>0, n\geqslant 0, \tag{1.4.29}$$

$$0<\frac{-rK_n'(r)}{K_n(r)} \leqslant 2n+\alpha_0\frac{rI_n'(r)}{I_n(r)},\quad \forall r\geqslant \beta R_0,\ n\geqslant 0. \tag{1.4.30}$$

其中 $\alpha_0\geqslant 1$ 是一个不依赖于 n 的常数。

$$\frac{K_{n+1}(r_1)}{K_{n+1}(r_2)}<\frac{K_n(r_1)}{K_n(r_2)},\quad \forall r_1\geqslant r_2>0, n\geqslant 0. \tag{1.4.31}$$

证明　由 $I_n(r),K_n(r)$ 的积分表达式 (Andrews, 1992, P.237),

$$I_n(r)=\frac{(r/2)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-1/2}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t,\ r>0, n=0,1,\cdots, \tag{1.4.32}$$

$$K_n(r)=\frac{\sqrt{\pi}(r/2)^n}{\Gamma(n+1/2)}\int_1^{\infty}(t^2-1)^{n-1/2}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t,\ r>0,n=0,1,\cdots,\tag{1.4.33}$$

对 $I_{n+1}(r),K_{n+1}(r)$ 中的积分分部积分得到：

$$\begin{aligned}I_{n+1}(r)&=\frac{(r/2)^{n+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1+1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+1-1/2}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t\\&=\frac{(r/2)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)}\int_{-1}^{1}(-t)(1-t^2)^{n-1/2}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t<I_n(r),\ \forall r>0,n\geqslant 0,\\K_{n+1}(r)&=\frac{\sqrt{\pi}(r/2)^{n+1}}{\Gamma(n+1+1/2)}\int_1^{\infty}(t^2-1)^{n+1-1/2}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t\\&=\frac{\sqrt{\pi}(r/2)^n}{\Gamma(n+1/2)}\int_1^{\infty}t(t^2-1)^{n-1/2}\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t>K_n(r),\ \forall r>0,n\geqslant 0.\end{aligned}$$

立刻可得到不等式 (1.4.29)。由等式 $K_0'(r)=-K_1(r)$ 和 $I_0'(r)=I_1(r)$ (Andrews, 1992, P.236) 可得：

$$\frac{-rK_0'(r)}{K_0(r)}=\frac{K_1(r)}{K_0(r)}\frac{I_0(r)}{I_1(r)}\frac{rI_0'(r)}{I_0(r)}\equiv F(r)\frac{rI_0'(r)}{I_0(r)},\quad \forall r>0,\tag{1.4.34}$$

其中，

$$F(r)=\frac{K_1(r)}{K_0(r)}\frac{I_0(r)}{I_1(r)},$$

$F(r)$ 在 $[\beta R_0,\infty)$ 上是连续函数，由 $K_0(r),K_1(r),I_0(r),I_1(r)$ 在无穷远处的性质 (Andrews, 1992, P.250) 可知：

$$\lim_{r\to\infty}F(r)=1,$$

因而存在一个常数 $\alpha_0\geqslant 1$，使

$$F(r)\leqslant\alpha_0,\quad \forall r\in[\beta R_0,\infty).$$

由 (1.4.34) 可得：

$$0<\frac{-rK_0'(r)}{K_0(r)}\leqslant\alpha_0\frac{rI_0'(r)}{I_0(r)},\quad \forall r\geqslant\beta R_0,\tag{1.4.35}$$

即不等式 (1.4.30) 对 $n=0$ 成立。对 $n>0$ ，由等式

$$\begin{aligned}-rK_n'(r)&=nK_n(r)+rK_{n-1}(r),\\rI_n'(r)&=-nI_n(r)+rI_{n-1}(r),\end{aligned}$$

可得：

$$0<\frac{-rK_n'(r)}{K_n(r)}=n+\frac{rK_{n-1}(r)}{K_n(r)}\leqslant n+r$$

$$\leqslant n+\frac{rI_{n-1}(r)}{I_n(r)}=2n+\frac{rI'_n(r)}{I_n(r)},\quad \forall r>0,n\geqslant 1. \tag{1.4.36}$$

综合估计式 (1.4.35) 和式 (1.4.36) 得到不等式 (1.4.30)，引理获证。 ■

关于双线性形式 $b_\beta(u,v),b_{\beta,N}(u,v)$ 有下面引理成立：

引理 1.4.3 $b_\beta(u,v),b_{\beta,N}(u,v)$ 是定义在 $V_0\times V_0$ 上的有界双线性形式，并且，

$$0\leqslant b_{\beta,N}(v,v)\leqslant b_\beta(v,v)\leqslant C\|v\|^2_{1,\Omega_i},\quad \forall v\in V_0, \tag{1.4.37}$$

$$|b_{\beta,N}(u,v)|\leqslant C\|u\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i},\quad \forall u,v\in V_0, \tag{1.4.38}$$

$$|b_\beta(u,v)|\leqslant C\|u\|_{1,\Omega_i}\|v\|_{1,\Omega_i},\quad \forall u,v\in V_0, \tag{1.4.39}$$

其中 C 是一个不依赖于 N 和 R 的常数，在不同的地方可以取不同的数值。

证明　对于任意 $u,v\in V_0$，u,v 在 Γ_R 上的迹可展开为傅氏级数：

$$u(R,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{1.4.40}$$

$$v(R,\theta)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta), \tag{1.4.41}$$

将上式代入 $b_\beta(u,v),b_{\beta,N}(u,v)$ 的表达式 (1.4.25), (1.4.26) 可得：

$$b_\beta(u,v)=\frac{\pi z_0}{2}a_0c_0+\pi\sum_{n=1}^{\infty}z_n(a_nc_n+b_nd_n), \tag{1.4.42}$$

$$b_{\beta,N}(u,v)=\frac{\pi z_0}{2}a_0c_0+\pi\sum_{n=1}^{N}z_n(a_nc_n+b_nd_n). \tag{1.4.43}$$

对于任意 $v\in V_0$，在 $B_R=\{x\mid |x|\leqslant R\}$ 上定义函数 $\tilde v$：

$$\tilde v=\begin{cases} v, & \forall x\in\Omega_i,\\ 0, & \forall x\in\Omega_0.\end{cases}$$

由 $\tilde v$ 的定义可知 $\tilde v\in H^1(B_R)$ 并且 $\tilde v|_{\Gamma_R}=v|_{\Gamma_R}$。进一步在 B_R 上构造 v_1：

$$-\Delta v_1+\beta^2v_1=0,\quad \forall x\in B_R, \tag{1.4.44}$$

$$v_1|_{\Gamma_R}=v|_{\Gamma_R}. \tag{1.4.45}$$

v_1 由 $v|_{\Gamma_R}$ 唯一确定，由边值问题 (1.4.44)~(1.4.45) 的变分原理知 v_1 使泛函

$$\int_{B_R}(|\nabla w|^2+\beta^2w^2)\mathrm{d}x$$

在集合 $\{w \in H^1(B_R), w|_{\Gamma_R} = v|_{\Gamma_R}\}$ 上取最小值，即：

$$\begin{aligned}\int_{B_R}(|\nabla v_1|^2 + \beta^2 v_1^2)\mathrm{d}x &\leqslant \int_{B_R}(|\nabla \tilde{v}|^2 + \beta^2 \tilde{v}^2)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Omega_i}(|\nabla v|^2 + \beta^2 v^2)\mathrm{d}x \leqslant M_\beta \|v\|_{1,\Omega_i}^2.\end{aligned} \tag{1.4.46}$$

另一方面在 Γ_R 上 $v_1(R,\theta) = v(R,\theta)$，由 $v(R,\theta)$ 的傅氏级数展开式 (1.4.41) 可得 $v_1(r,\theta)$ 的表达式：

$$v_1(r,\theta) = \frac{c_0}{2}\frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta R)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(\beta r)}{I_n(\beta R)}(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta), \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{1.4.47}$$

其中，

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(R,\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta, \\ d_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(R,\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

通过计算可得：

$$\begin{aligned}\int_{B_R}(|\nabla v_1|^2 + \beta^2 v_1^2)\mathrm{d}x &= \int_{\Gamma_R} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial n}\mathrm{d}s \\ &= \frac{\pi z_0^* c_0^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty} z_n^*(c_n^2 + d_n^2),\end{aligned} \tag{1.4.48}$$

其中，

$$z_n^* = \begin{cases}\dfrac{BRI_n'(\beta R)}{I_n(\beta R)}, & n > 0, \\ \dfrac{BRI_0'(\beta R)}{2I_0(\beta R)}, & n = 0.\end{cases}$$

综合估计式 (1.4.46) 和式 (1.4.48) 我们得到：

$$\frac{\pi z_0^* c_0^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty} z_n^*(c_n^2 + d_n^2) \leqslant M_\beta \|v\|_{1,\Omega_i}^2. \tag{1.4.49}$$

应用不等式 (1.4.30) 可得：

$$z_n \leqslant 2n + \alpha_0 z_n^*, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.4.50}$$

因而：

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant b_\beta(v,v) &= \frac{\pi z_0 c_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} z_n (c_n^2 + d_n^2) \\
&\leqslant \alpha_0 \left\{ \frac{\pi z_0^* c_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} z_n^* (c_n^2 + d_n^2) \right\} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n (c_n^2 + d_n^2) \\
&\leqslant C \|v\|_{1,\Omega_i}^2.
\end{aligned}
$$

最后一个不等式由 (1.4.49) 和引理 1.2.3 得到，其中 C 是一个不依赖于 R 的常数。由此可直接得到不等式 (1.4.37)。应用 Cauchy 不等式可得到估计式 (1.4.38)~(1.4.39)。引理获证。 ■

应用引理 1.4.1 和引理 1.4.3，由 Lax-Milgram 定理可得到有界计算区域 Ω_i 上的简化问题 (1.4.22) 和 (1.4.23) 的存在唯一性。

定理 1.4.1　假设 $f \in H^{-1}(\Omega_i)$，则：

(i) 变分问题 (1.4.22) 存在唯一解 $u \in H^1(\Omega_i)$，并且 u 是二维修正 Helmholtz 方程外问题 (1.4.1)~(1.4.3) 的解在有界计算区域 Ω_i 上的限制。

(ii) 对任意非负整数 $N \geqslant 0$，变分问题 (1.4.23) 存在唯一解 $u^N \in H^1(\Omega_i)$。 ■

1.4.3　简化边值问题的有限元近似

应用在 1.2.3 节中引进的有限元子空间 $V_0^h \subset V_0$，可得变分问题 (1.4.23) 的有限元近似：

$$
\begin{cases}
\text{找 } u_h^{N,R} \in V_0^h,\ \text{使} \\
a_\beta(u_h^{N,R}, v) + b_{\beta,N}(u_h^{N,R}, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_0^h.
\end{cases} \tag{1.4.51}
$$

直接应用 Lax-Milgram 定理可得变分问题 (1.4.51) 的存在唯一性。为了讨论误差 $u - u_h^{N,R}$ 的估计式，首先估计误差 $b_\beta(u,v) - b_{\beta,N}(u,v)$。

引理 1.4.4　下面的估计式成立：

$$
|b_\beta(u,v) - b_{\beta,N}(u,v)| \leqslant C \frac{R K_{N+1}(\beta R)}{K_{N+1}(\beta R_0)} \|u\|_{1,\Omega_*} \|v\|_{1,\Omega_i}, \quad \forall v \in V_0,
$$

其中 C 是一个常数，不依赖于 R 和 N，$\Omega_* = \{x \mid x \in \Omega,\ |x| \leqslant R_0\}$。

证明　将 u 在 $\Gamma_0 = \{x \mid |x| = R_0\}$ 上的值 $u(R_0, \theta)$ 展开为傅氏级数：

$$
u(R_0, \theta) = \frac{e_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (e_n \cos n\theta + f_n \sin n\theta).
$$

在 $|x| \geqslant R_0$ 的区域上，u 满足方程 $-\Delta u + \beta^2 u = 0$ 和无穷远条件 (1.4.3)，因而可由其在 Γ_0 上的值唯一确定：

$$u(r,\theta)=\frac{c_0K(\beta r)}{2K_0(\beta R_0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n(\beta r)}{K_n(\beta R_0)}(e_n\cos n\theta+f_n\sin n\theta),\quad \forall r\geqslant R_0. \tag{1.4.52}$$

u 在 Γ_R 上的值为：

$$u(R,\theta)=\frac{c_0K(\beta R)}{2K_0(\beta R_0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_n(\beta R)}{K_n(\beta R_0)}(e_n\cos n\theta+f_n\sin n\theta),\quad \forall r\geqslant R_0. \tag{1.4.53}$$

将上式及 $v(R,\theta)$ 的傅氏级数展开式 (1.4.41) 代入 $b_\beta(u,v)$ 和 $b_{\beta,N}(u,v)$ 的表达式可得：

$$|b_\beta(u,v)-b_{\beta,N}(u,v)|\leqslant\sum_{N+1}^{\infty}\pi z_n\frac{K_n(\beta R)}{K_n(\beta R_0)}|c_ne_n+d_nf_n|.$$

应用不等式 (1.4.31) 和 Cauchy 不等式由上式得到：

$$|b_\beta(u,v)-b_{\beta,N}(u,v)|\leqslant\frac{K_{N+1}(\beta R)}{K_{N+1}(\beta R_0)}\left\{\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi z_n(c_n^2+d_n^2)\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi z_n(e_n^2+f_n^2)\right\}^{1/2}.$$

注意到：

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi z_n(c_n^2+d_n^2)\leqslant b_\beta(v,v)\leqslant M_\beta\|v\|_{1,\Omega_i}^2,$$

并且，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi z_n(e_n^2+f_n^2)\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi(n+\beta R)(e_n^2+f_n^2)\leqslant CR\|u\|_{1,\Omega_*}^2,$$

其中 C 是一个常数，不依赖于 R 和 N。综合上面分析，引理获证。 ■

有了上面的准备，可得下面的误差估计。

定理 1.4.2 下面的误差估计式成立：

$$\left\|u-u_h^{N,R}\right\|_{1,\Omega_i}\leqslant C\left\{\inf_{v\in V_0^h}\|u-v\|_{1,\Omega_i}+\frac{RK_{N+1}(\beta R)}{K_{N+1}(\beta R_0)}\|u\|_{1,\Omega_*}\right\}, \tag{1.4.54}$$

其中 C 是一个不依赖于 N,R 和 h 的常数，u 是变分问题 (1.4.22) 的解。

证明　由变分等式 (1.4.22) 和式 (1.4.51) 可知，$u-u_h^{N,R}$ 满足：

$$a_\beta(u-u_h^{N,R},v)+b_{\beta,N}(u-u_h^{N,R},v)=b_{\beta,N}(u,v)-b_\beta(u,v),\forall v\in V_0^h. \quad (1.4.55)$$

对任意的 $v\in V_0^h$ 有：

$$\begin{aligned}
\alpha_\beta\left\|v-u_h^{N,R}\right\|_{1,\Omega_i}^2 &\leqslant a(v-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})+b_{\beta,N}(v-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})\\
&=a(u-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})+b_{\beta,N}(u-u_h^{N,R},v-u_h^{N,R})+a(v-u,v-u_h^{N,R})\\
&\quad+b_{\beta,N}(v-u,v-u_h^{N,R})\\
&=b_{\beta,N}(u,v-u_h^{N,R})-b_\beta(u,v-u_h^{N,R})+a(v-u,v-u_h^{N,R})\\
&\quad+b_{\beta,N}(v-u,v-u_h^{N,R}).
\end{aligned}$$

应用引理 1.4.1, 引理 1.4.3 和引理 1.4.4 可得：

$$\left\|v-u_h^{N,R}\right\|_{1,\Omega_i}\leqslant C\left\{\|u-v\|_{1,\Omega_i}+\frac{RK_{N+1}(\beta R)}{K_{N+1}(\beta R_0)}\|u\|_{1,\Omega_*}\right\},$$

其中 C 是一个不依赖于 N,R 和 h 的常数，再应用三角不等式：

$$\left\|u-u_h^{N,R}\right\|_{1,\Omega_i}\leqslant\|u-v\|_{1,\Omega_i}+\left\|v-u_h^{N,R}\right\|_{1,\Omega_i},$$

立刻得到估计式 (1.4.54)，定理获证。 ∎

1.4.4　三维修正 Helmholtz 方程外问题的整体边界条件

在这一节中我们讨论三维修正 Helmholtz 方程外问题：

$$-\Delta u+\beta^2u=f(x),\quad \forall x\in\Omega, \quad (1.4.56)$$

$$u|_\Gamma=g, \quad (1.4.57)$$

$$\text{当}|x|\to\infty\text{ 时}, u\to 0, \quad (1.4.58)$$

此时 $\Omega\subset R^3$，人工边界 Γ_R 是以原点为中心，R 为半径的球面。考虑问题 (1.4.56)~(1.4.58) 的解在区域 Ω_e 上的限制，在 Ω_e 上 u 满足：

$$-\Delta u+\beta^2u=0,\quad \forall x\in\Omega_e, \quad (1.4.59)$$

$$u|_\Gamma=u(R,\theta,\varphi), \quad (1.4.60)$$

$$\text{当}|x|\to\infty\text{ 时}, u\to 0 \quad (1.4.61)$$

如果我们知道问题 (1.4.56)~(1.4.58) 的解在人工边界 Γ_R 上的值，则 u 在 Ω_e 上可以唯一地被函数 $u(R,\theta,\varphi)$ 确定。令：

$$i_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} I_{n+1/2}(r), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$k_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} K_{n+1/2}(r), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

则 $i_n(r)$, $k_n(r)$ 表示 n 阶的第一类和第二类修正的球 Bessel 函数。问题 (1.4.59)~(1.4.61) 的解 $u(r,\theta,\varphi)$ 可表示为:

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{a_{00}}{2}\frac{k_0(\beta r)}{k_0(\beta R)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n(\beta r)}{k_n(\beta R)}\Big\{\frac{1}{2}a_{n0}P_n^{(0)}(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\Big\}, \quad \forall r \geqslant R, \tag{1.4.62}$$

其中,

$$a_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi R^2(n+m)!R^2}\int_{\Gamma_R} u(y)P_n^m(\cos\xi)\cos m\psi \mathrm{d}s_y, \tag{1.4.63}$$

$$b_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi R^2(n+m)!R^2}\int_{\Gamma_R} u(y)P_n^m(\cos\xi)\sin m\psi \mathrm{d}s_y. \tag{1.4.64}$$

在人工边界 Γ_R 上有:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_R} = \frac{\partial u(R,\theta,\varphi)}{\partial r} = \frac{a_{00}}{2}\frac{\beta k_0'(\beta R)}{k_0(\beta R)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta k_n'(\beta R)}{k_n(\beta R)}\Big\{a_{n0}P_n^{(0)}(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^{(m)}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\Big\}.$$

将 $\{a_{nm}, b_{nm}\}$ 的表达式 (1.4.63) 和 (1.4.64) 代入上式, 并应用 Legendre 函数的加法定理 (1.3.13) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_R} &= \frac{\beta}{4\pi R^2}\frac{k_0'(\beta R)}{k_0(\beta R)}\int_{\Gamma_R} u(y)\mathrm{d}s_y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta(2n+1)}{4\pi R^2}\frac{k_n'(\beta R)}{k_n(\beta R)} \\
&\quad \cdot \Big\{\int_{\Gamma_R} u(y)P_n^{(0)}(\cos\xi)P_n^{(0)}(\cos\theta)\mathrm{d}s_y \\
&\quad + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{\Gamma_R} u(y)P_n^{(m)}(\cos\xi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos(\varphi-\psi)\mathrm{d}s_y\Big\} \\
&= \frac{\beta}{4\pi R^2}\frac{k_0'(\beta R)}{k_0(\beta R)}\int_{\Gamma_R} u(y)\mathrm{d}s_y + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta(2n+1)}{4\pi R^2}\frac{k_n'(\beta R)}{k_n(\beta R)} \\
&\quad \cdot \int_{\Gamma_R} u(y)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_y,
\end{aligned} \tag{1.4.65}$$

其中，

$$P_n(t) = P_n^0(t),$$
$$\cos(\gamma) = \cos\xi\cos\theta + \sin\xi\sin\theta\cos(\varphi - \psi).$$

等式 (1.4.65) 就是三维修正 Helmholtz 方程外问题 (1.4.56)~(1.4.58) 的解在人工边界 Γ_R 上满足的准确边界条件。在其右端的无穷级数中取前面 $N+1$ ($N = 0,1,\cdots$) 项作为近似，我们得到一系列近似的人工边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\beta}{4\pi R^2}\frac{k_0'(\beta R)}{k_0(\beta R)}\int_{\Gamma_R} u(y)\mathrm{d}s_y + \sum_{n=1}^{N}\frac{\beta(2n+1)}{4\pi R^2}\frac{k_n'(\beta R)}{k_n(\beta R)} \cdot \int_{\Gamma_R} u(y)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_y. \tag{1.4.66}$$

准确边界条件 (1.4.65) 和近似人工边界条件 (1.4.66) 可将问题 (1.4.56)~(1.4.58) 简化为在有界区域 Ω_i 上进行数值计算，进一步的细节这里将不再讨论。本节的主要内容来自论文 (Han and Bao, 2000)。

1.5　Helmholtz 方程外问题的整体人工边界条件

在这一节中我们讨论 Helmholtz 方程 Dirichlet 和 Neumann 外问题的数值解：

$$-\Delta u - k^2 u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.5.1}$$

$$u|_\Gamma = g(x), \tag{1.5.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku = o\Big(\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\Big), \quad 当\ r\to\infty\ 时 \tag{1.5.3}$$

和

$$-\Delta u - k^2 u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.5.4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = h(x), \tag{1.5.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku = o\Big(\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\Big), \quad 当\ r\to\infty\ 时 \tag{1.5.6}$$

其中 $n = 2,3$，实数 $k > 0$，$g(x)$, $h(x)$ 为 Γ 上的已知函数，$f(x)$ 为 Ω 上的已知函数，并满足 1.1 节中叙述的条件。在 g, h, f 满足适当光滑性条件下，Helmholtz 方程外问题 (1.5.1)~(1.5.3) 和问题 (1.5.4)~(1.5.6) 存在唯一解 (Colton and Kress, 1983)。与前几节一样在 Ω 内引进人工边界 $\Gamma_R = \{x \mid |x| = R,\ R > R_0\}$，$\Gamma_R$ 将

Ω 分割为无界区域 Ω_e 和有界计算区域 $\Omega_i = \Omega\backslash\bar{\Omega}_e$。这一节的主要目的是分别对二维 $(n=2)$ 和三维 $(n=3)$ Helmholtz 方程外问题在人工边界 Γ_R 上找出准确的整体边界条件和高精度的近似整体人工边界条件，从而将原问题简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题。

1.5.1 二维 Helmholtz 方程外问题的 Dirichlet to Sommerfeld 映射

首先讨论 Dirichlet 问题 (1.5.1)~(1.5.3)，此时 $n=2$。考虑问题 (1.5.1)~(1.5.3) 的解 $u(x)$ 在区域 Ω_e 上的限制，在 Ω_e 上 $u(x)$ 满足：

$$-\Delta u - k^2 u = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{1.5.7}$$

$$u|_{\Gamma_R} = u(R,\theta), \tag{1.5.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku = o\Big(\frac{1}{r^{1/2}}\Big), \quad 当\ r\to\infty\ 时 \tag{1.5.9}$$

由于 $u(x)$ 在人工边界上的值 $u(R,\theta)$ 是未知的，因而问题 (1.5.7)~(1.5.9) 不能独立求解。如果已知 $u(R,\theta)$，则问题 (1.5.7)~(1.5.9) 存在唯一解并且其解 $u(r,\theta)$ 可由下式给出：

$$u(r,\theta) = \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(kR)}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)}\{a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta\}, \tag{1.5.10}$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta, \tag{1.5.11}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta, \tag{1.5.12}$$

$H_n^{(1)}(\rho)$ 是第一类 n 阶 Hankel 函数 (Andrews, 1992, P.308)，并且 $H_n^{(1)}(kr)$ 满足 Sommerfeld 辐射条件 (1.5.9)。在人工边界 Γ_R 上：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r} &= \frac{ka_0}{2}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)} \\ &+ k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}\{a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta\}.\end{aligned}$$

将 $\{a_n, b_n\}$ 的表达式 (1.5.11)~(1.5.12) 代入上式得到：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = &\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi + \frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)} \\ &\cdot \int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{1.5.13}$$

将上式右端的积分分部积分可得到它的另外两个等价形式：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{nH_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial\varphi}\sin n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.5.14}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$-\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{n^2H_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial\varphi^2}\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.5.15}$$

等价的边界条件 (1.5.13), (1.5.14) 和 (1.5.15) 是二维 Helmholtz 方程外问题 (1.5.1)~(1.5.3) 的解 $u(x)$ 在人工边界 Γ_R 上满足的准确边界条件。应用其中的任何一个可将问题 (1.5.1)~(1.5.3) 简化为有界计算区域 Ω_i 上的等价 Helmholtz 方程的边值问题，例如应用边界条件 (1.5.13) 可得：

$$-\Delta u-k^2u=f(x),\quad \forall x\in\Omega_i, \tag{1.5.16}$$

$$u|_{\Gamma}=g(x), \tag{1.5.17}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.5.18}$$

在论文 (Keller and Givoli, 1989) 中条件 (1.5.13) 被称为 Dirichlet to Neumann 映射。实际计算中通常在准确边界条件 (1.5.13), (1.5.14) 和 (1.5.15) 右端的无穷级数中只选取有限项 ($N+1$ 项)，即在人工边界 Γ_R 上得到二维 Helmholtz 方程外问题近似人工边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.5.19}$$

和它的等价形式：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{nH_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi)}{\partial\varphi}\sin n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.5.20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$-\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{n^2H_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(R,\varphi)}{\partial\varphi^2}\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.5.21}$$

应用人工边界条件 (1.5.19) 可将二维 Helmholtz 方程外问题 (1.5.1)~(1.5.3) 简化为有界计算区域 Ω_i 上的近似边值问题：

$$-\Delta u^N-k^2u^N=f(x),\quad \forall x\in\Omega_i, \tag{1.5.22}$$

$$u^N|_\Gamma=g(x), \tag{1.5.23}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u^N(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n^{(1)'}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u^N(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{1.5.24}$$

Harari and Hughes (1992) 在他们的论文中指出对任意的非负整数 N 和任意实数 $k>0$，问题 (1.5.22)~(1.5.24) 没有唯一性。在问题 (1.5.22)~(1.5.24) 的解不唯一的情形，不能应用它去近似原问题 (1.5.1)~(1.5.3)。解决这个问题的一个直接自然的方法是在人工边界 Γ_R 上研究 Helmholtz 方程外问题的 Dirichlet to Sommerfeld 映射。将准确的边界条件 (1.5.13) 改写为下面的等价形式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)\bigg|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}H_0^{(1)}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$\equiv S(u|_{\Gamma_R}). \tag{1.5.25}$$

对上述准确边界条件右端中的无穷级数进行截断，取前面 $N+1$ 项可得下面的近似人工边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)\bigg|_{\Gamma_R}=\frac{k}{2\pi}\frac{H_0^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}H_0^{(1)}(kR)}{H_0^{(1)}(kR)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$+\frac{k}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{H_n^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}H_n^{(1)}(kR)}{H_n^{(1)}(kR)}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$\equiv S_N(u|_{\Gamma_R}) \tag{1.5.26}$$

虽然准确边界条件 (1.5.13) 与 (1.5.25) 是等价的，但是近似人工边界条件 (1.5.19) 与 (1.5.26) 是不等价的。应用近似人工边界条件 (1.5.26) 将二维 Helmholtz 方程外问题 (1.5.1)~(1.5.3) 简化可得：

$$-\Delta u^N - k^2 u^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.5.27}$$
$$u^N|_\Gamma = g(x), \tag{1.5.28}$$
$$\left(\frac{\partial u^N}{\partial r} - \mathrm{i}ku^N\right)\Big|_{\Gamma_R} = S_N(u^N|_{\Gamma_R}). \tag{1.5.29}$$

对近似问题 (1.5.27)~(1.5.29) 有下面的唯一性定理成立：

定理 1.5.1　对任意非负整数 N 和任意实数 $k>0$，近似边值问题 (1.5.27)~(1.5.29) 至多有一个解。

证明　设边值问题 (1.5.27)~(1.5.29) 有两个解 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$，令：

$$E(x) = u_1(x) - u_2(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.5.30}$$

则 $E(x)$ 满足：

$$-\Delta E - k^2 E = 0, \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.5.31}$$
$$E|_\Gamma = 0, \tag{1.5.32}$$
$$\left(\frac{\partial E}{\partial r} - \mathrm{i}kE\right)\Big|_{\Gamma_R} = S_N(E|_{\Gamma_R}). \tag{1.5.33}$$

用 E 的共轭函数 $\bar{E}$ 乘方程 (1.5.31)，在 Ω_i 上积分并分部积分可得：

$$\int_{\Omega_i} |\nabla E|^2 \mathrm{d}x - k^2 \int_{\Omega_i} |E|^2 \mathrm{d}x - \mathrm{i}k \int_{\Gamma_R} E\bar{E}\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_R} S_N(E|_{\Gamma_R})\bar{E}\mathrm{d}s \tag{1.5.34}$$

另一方面 $E|_{\Gamma_R} = E(R,\theta)$，将其展开为傅氏级数：

$$E(R,\theta) = \frac{e_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(e_n\cos n\theta + f_n\sin n\theta),$$

在区域 Ω_e 上引进辅助函数：

$$E_N(r,\theta) = \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_0^{(1)}(kR)}\frac{e_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(kR)}(e_n\cos n\theta + f_n\sin n\theta), R \leqslant r < \infty, \tag{1.5.35}$$

函数 E_N 在无界区域 Ω_e 上满足：

$$-\Delta E_N - k^2 E_N = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{1.5.36}$$

$$E_N|_{\Gamma_R} = E_N(R,\theta), \tag{1.5.37}$$

$$\frac{\partial E_N}{\partial r} - \mathrm{i}kE_N = o\Big(\frac{1}{r^{1/2}}\Big), \quad 当r \to \infty时. \tag{1.5.38}$$

记：

$$\Omega_{R,\rho} = \{x \mid R < |x| < \rho\},$$

$$\Gamma_\rho = \{x \mid |x| = \rho\}.$$

用 $\bar{E}_N(x)$ 乘 Helmholtz 方程 (1.5.36)，在 $\Omega_{R,\rho}$ 上积分得：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{R,\rho}} |\nabla E_N|^2 \mathrm{d}x - k^2 \int_{\Omega_{R,\rho}} |E_N|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_R} \frac{\partial E_N}{\partial r}\bar{E}_N \mathrm{d}s \\ &= \int_{\Gamma_\rho} \Big(\frac{\partial E_N}{\partial r} - \mathrm{i}kE_N\Big)\bar{E}_N \mathrm{d}s + \mathrm{i}k\int_{\Gamma_\rho} |E_N|^2 \mathrm{d}s, \quad \forall \rho > R,\end{aligned} \tag{1.5.39}$$

由 E_N 满足 Sommerfeld 条件 (1.5.38) 和第一类 Hankel 函数 $H_n^{(1)}(k\rho)$ 的渐近展开式 (Andrews, 1992, P.318) 可得：

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma_\rho} \Big(\frac{\partial E_N}{\partial r} - \mathrm{i}kE_N\Big)\bar{E}_N \mathrm{d}s = 0, \\ &\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma_\rho} E_N\bar{E}_N \mathrm{d}s = \frac{e_0\bar{e}_0}{2k|H_0^{(1)}(kR)|^2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{e_n\bar{e}_n + f_n\bar{f}_n}{k|H_n^{(1)}(kR)|^2}.\end{aligned} \tag{1.5.40}$$

在等式 (1.5.39) 中令 $\rho \to \infty$，我们得到：

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_e} |\nabla E_N|^2 \mathrm{d}x - k^2 \int_{\Omega_e} |E_N|^2 \mathrm{d}x - \mathrm{i}k\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma_\rho} |E_N|^2 \mathrm{d}s \\ &= -\int_{\Gamma_R} \frac{\partial E_N}{\partial r}\bar{E}_N \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{1.5.41}$$

注意到算子 $S_N(E|_{\Gamma_R})$ 的表达式 (1.5.26)，则：

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} S_N(E|_{\Gamma_R})\bar{E}\mathrm{d}s &= \int_{\Gamma_R} S_N(E_N|_{\Gamma_R})\bar{E}_N \mathrm{d}s \\ &= \int_{\Gamma_R} \Big(\frac{\partial E_N}{\partial r} - \mathrm{i}kE_N\Big)\bar{E}_N \mathrm{d}s \\ &= \int_{\Gamma_R} \frac{\partial E_N}{\partial r}\bar{E}_N \mathrm{d}s - \mathrm{i}k\int_{\Gamma_R} E_N\bar{E}_N \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

将上式代入 (1.5.34) 得到:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_i}|\nabla E|^2\mathrm{d}x-k^2\int_{\Omega_i}|E|^2\mathrm{d}x-\mathrm{i}k\int_{\Gamma_R}E\bar{E}\mathrm{d}s\\&=\int_{\Gamma_R}\frac{\partial E_N}{\partial r}\bar{E}_N\mathrm{d}s-\mathrm{i}k\int_{\Gamma_R}E_N\bar{E}_N\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{1.5.42}$$

将式 (1.5.41) 与式 (1.5.42) 相加取虚部可得到:

$$\int_{\Gamma_R}E\bar{E}\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_R}E_N\bar{E}_N\mathrm{d}s+\lim_{\rho\to\infty}\int_{\Gamma_\rho}E_N\bar{E}_N\mathrm{d}s=0.\tag{1.5.43}$$

由一个简单计算可得:

$$\int_{\Gamma_R}E\bar{E}\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_R}E_N\bar{E}_N\mathrm{d}s=R\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\pi}{2}(e_n\bar{e}_n+f_n\bar{f}_n).\tag{1.5.44}$$

综合等式 (1.5.40), (1.5.42) (1.5.43) 我们得到:

$$\frac{|e_0|^2}{2k|H_0^{(1)}(kR)|^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{|e_n|^2+|f_n|^2}{k|H_n^{(1)}(kR)|^2}+R\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\pi}{2}(|e_n|^2+|f_n|^2)=0.$$

由此可得:

$$\begin{aligned}e_n&=0,\qquad n=0,1,\cdots,\\f_n&=0,\qquad n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

因而 $E|_{\Gamma_R}=0$, $\left.\dfrac{\partial E}{\partial r}\right|_{\Gamma_R}=0$ 并且 $E(x)=0$, $\forall x\in\Omega_i$。定理获证。 ■

1.5.2 三维 Helmholtz 方程外问题的 Dirichlet to Sommerfeld 映射

我们讨论三维 Helmholtz 方程外问题 (1.5.1)~(1.5.3), 问题 (1.5.1)~(1.5.3) 的解 u 在无界区域 Ω_e 上的限制满足:

$$-\Delta u-k^2u=0,\quad \forall x\in\Omega_e,\tag{1.5.45}$$

$$u|_{\Gamma_R}=u(R,\theta,\varphi),\tag{1.5.46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku=o\Big(\frac{1}{r}\Big),\quad 当\ r\to\infty.\tag{1.5.47}$$

u 在人工边界 Γ_R (此时 Γ_R 是以原点为中心, R 为半径的球面) 上的值 $u(R,\theta,\varphi)$ 是未知的。如果函数 $u(R,\theta,\varphi)$ 为已知函数, 则问题 (1.5.45)~(1.5.47) 存在唯一解 u, u 可由下式给出:

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\varphi)=&\frac{a_{00}}{2}\frac{h_0^{(1)}(kr)}{h_0^{(1)}(kR)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^{(1)}(kr)}{h_n^{(1)}(kR)}\Big\{\frac{a_{n0}}{2}P_n^{(0)}(\cos\theta)\\&+\sum_{m=1}^{n}P_n^{(m)}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\Big\},r\geqslant R,\end{aligned}\tag{1.5.48}$$

其中 $\{a_{nm}, b_{nm}\}$ 是 $u(R,\theta,\varphi)$ 在球面 Γ_R 上的傅氏系数，由 (1.4.63) 和 (1.4.64) 给出；$h_n^{(1)}(\rho)$ 表示第一类球 Hankel 函数 (Andrews, 1992, P. 309)。在人工边界 Γ_R 我们有：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)\bigg|_{\Gamma_R}=\frac{ka_{00}}{2}\frac{h_0^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}h_0^{(1)}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)}+k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)}$$
$$\cdot\left\{\frac{a_{n0}}{2}P_n^{(0)}(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}P_n^{(m)}(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\right\}.\tag{1.5.49}$$

将 $\{a_{nm}, b_{nm}\}$ 的表达式 (1.4.63) 和 (1.4.64) 代入上式并应用 Legendre 函数的加法定理可得：

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)\bigg|_{\Gamma_R}\\
=&\frac{k}{4\pi R^2}\frac{h_0^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}h_0^{(1)}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)}\int_{\Gamma_R}u(y)\mathrm{d}s_y\\
&+\frac{k}{4\pi R^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\frac{h_n^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)}\\
&\cdot\left\{\int_{\Gamma_R}u(y)P_n^0(\cos\xi)P_n^0(\cos\theta)\mathrm{d}s_y+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right.\\
&\left.\cdot\int_{\Gamma_R}u(y)P_n^m(\cos\xi)P_n^m(\cos\theta)\cos(\varphi-\psi)\mathrm{d}s_y\right\},\\
=&\frac{k}{4\pi R^2}\frac{h_0^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}h_0^{(1)}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)}\int_{\Gamma_R}u(y)\mathrm{d}s_y\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(2n+1)}{4\pi R^2}\frac{h_n^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)}\int_{\Gamma_R}u(y)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_y,
\end{aligned}\tag{1.5.50}$$

其中，

$$P_n(t)=P_n^0(t),$$
$$\cos(\gamma)=\cos\xi\cos\theta+\sin\xi\sin\theta\cos(\varphi-\psi).$$

等式 (1.5.50) 是三维 Helmholtz 方程外问题 (1.5.1)~(1.5.3) ($n=3$) 的解 u 在人工边界 Γ_R 上满足的准确边界条件。在式 (1.5.50) 右端的级数中取前面 $N+1$ 项作为近似，我们得到一系列近似的人工边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)\bigg|_{\Gamma_R}=\frac{k}{4\pi R^2}\frac{h_0^{(1)'}(kR)-\mathrm{i}h_0^{(1)}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)}\int_{\Gamma_R}u(y)\mathrm{d}s_y+\sum_{n=1}^{N}\frac{k(2n+1)}{4\pi R^2}$$

$$\cdot \frac{h_n^{(1)'}(kR) - \mathrm{i}h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)} \int_{\Gamma_R} u(y) P_n(\cos\gamma) \mathrm{d}s_y, \tag{1.5.51}$$

应用人工边界条件 (1.5.51) 可将三维 Helmholtz 方程外问题 (1.5.1)～(1.5.3) 简化为有界计算区域 Ω_i 上的近似问题：

$$-\Delta u^N - k^2 u^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{1.5.52}$$

$$u^N|_\Gamma = g(x), \tag{1.5.53}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u^N}{\partial r} - \mathrm{i}ku^N\right)\Big|_{\Gamma_R} = &\frac{k}{4\pi R^2} \frac{h_0^{(1)'}(kR) - \mathrm{i}h_0^{(1)}(kR)}{h_0^{(1)}(kR)} \int_{\Gamma_R} u^N(y) \mathrm{d}s_y \\ &+ \sum_{n=1}^{N} \frac{k(2n+1)}{4\pi R^2} \\ &\cdot \frac{h_n^{(1)'}(kR) - \mathrm{i}h_n^{(1)}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)} \int_{\Gamma_R} u^N(y) P_n(\cos\gamma) \mathrm{d}s_y,\end{aligned} \tag{1.5.54}$$

对于有界计算区域 Ω_i 上的近似问题 (1.5.52)～(1.5.54)，有下面的唯一性定理：

定理 1.5.2　对任意非负整数 N 和任意实数 $k > 0$，近似边值问题 (1.5.52)～(1.5.54) 至多有一个解。■

定理 1.5.2 的证明与二维情形是类似的，这里不再详述。

由近似边值问题 (1.5.27)～(1.5.29) 和问题 (1.5.52)～(1.5.54) 可在有界计算区域 Ω_i 上得到 Helmholtz 方程外问题的数值近似解。

在本章中我们主要研究了二阶椭圆型方程外问题的整体人工边界方法，此时无界区域 Ω 是一个有界区域 Ω_0 的外部。对于区域 Ω 包含一个无穷长的带状区域 (二维) 或无穷长的柱体 (三维) 的情形也有很多研究，读者可参阅 Hagstrom and Keller (1986), Givoli, Patlashenko and Keller (1997), Han and Bao (2000) 等。

本章内容的主要参考文献为：Han (2005); Han and Wu (1985-A); Han and Bao (2000); Han, He and Wu (2000)。其他相关的工作可参阅 Feng (1982, 1983); Yu (1982, 1983, 2002); Givoli (1992); Du and Wu (1999); Ushijima (2001); Han and Wen (2003, 2004, 2005); Li and Wu (2004); Koyama (2007)。

第 2 章 Navier 方程组和 Stokes 方程组的整体人工边界条件

在这一章中我们讨论 Navier 方程组和 Stokes 方程组在无界区域上的数值解。

2.1 Navier 方程组和 Stokes 方程组

Navier 方程组是线性弹性力学理论的基本微分方程组 (Sokolnikoff, 1983)。设 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$ 表示弹性体的位移向量；$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})_{3\times 3}$ 和 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{3\times 3}$ 表示应变张量和应力张量，在线性弹性力学理论中应变张量可由位移向量以下式给出：

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3. \tag{2.1.1}$$

应力张量与应变张量满足 Hooke 定律：

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = \lambda \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}\right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \tag{2.1.2}$$

其中 δ_{ij} 是 Kroneker 记号，$\lambda > 0, \mu > 0$ 是各向同性弹性材料的 Lamè 常数，λ, μ 可由 Young 模量 E 和 Poisson 比 ν 给出：

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{2.1.3}$$

进一步假设 $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^{\mathrm{T}}$ 表示各向同性弹性体在点 x 处受到的体力，可得三维 Navier 方程组，即三维线性弹性方程组：

$$-\mu\Delta u_i - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\Big) = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.1.4}$$

它的向量形式为：

$$-\mu\Delta \boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(x). \tag{2.1.5}$$

用应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 表示，Navier 方程组有如下形式：

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}(x),\tag{2.1.6}$$

其中，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11}(\boldsymbol{u})+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12}(\boldsymbol{u})+\dfrac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{13}(\boldsymbol{u})\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{21}(\boldsymbol{u})+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{22}(\boldsymbol{u})+\dfrac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{23}(\boldsymbol{u})\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{31}(\boldsymbol{u})+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{32}(\boldsymbol{u})+\dfrac{\partial}{\partial x_3}\sigma_{33}(\boldsymbol{u})\end{pmatrix}.\tag{2.1.7}$$

考虑一个特别情况，Poisson 比 $\nu=1/2$，则：

$$\mu=\frac{E}{3},\qquad \lambda=+\infty,\tag{2.1.8}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0.\tag{2.1.9}$$

方程 (2.1.9) 表示弹性材料是不可压缩的。令：

$$p=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk},\tag{2.1.10}$$

p 表示压力，此时应力张量 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u},p)$ 可由位移 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 给出 (Sokolnikoff, 1983, P.69. P.79)：

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u},p)=2\mu\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}p,\quad 1\leqslant i,j\leqslant 3,\tag{2.1.11}$$

并且位移向量 $\boldsymbol{u}$ 和压力 p 满足下面 Stokes 方程组：

$$-\mu\Delta u_i+\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i,\quad i=1,2,3,\tag{2.1.12}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0.\tag{2.1.13}$$

方程组 (2.1.12)~(2.1.13) 可以写成下面向量形式：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f},\tag{2.1.14}$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}=0.\tag{2.1.15}$$

Stokes 方程组也可用应变张量 $\varepsilon(\boldsymbol{u})$，压力 p 表示为：

$$-2\mu\nabla\cdot\varepsilon(\boldsymbol{u})+\nabla p=\boldsymbol{f},\tag{2.1.16}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0.\tag{2.1.17}$$

其中，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon_{12}(\boldsymbol{u}) + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\varepsilon_{13}(\boldsymbol{u}) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\varepsilon_{21}(\boldsymbol{u}) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon_{22}(\boldsymbol{u}) + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\varepsilon_{23}(\boldsymbol{u}) \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\varepsilon_{31}(\boldsymbol{u}) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\varepsilon_{32}(\boldsymbol{u}) + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\varepsilon_{33}(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix}. \tag{2.1.18}$$

Stokes 方程组是描述线性不可压缩弹性材料的基本微分方程组。事实上，Stokes 方程组作为描述低雷诺数情况下粘性不可压缩流体流动的基本方程组更为大家所熟悉 (Happel and Brenner, 1983)。此时 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$ 表示流体的流动速度，p 表示流体的压力。在这一章中我们研究二维和三维 Navier 方程组和 Stokes 方程组外问题的数值近似解。

在二维情况下，外区域 $\Omega \subset R^2$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)^{\mathrm{T}}$。二维 Navier 方程组外问题的提法：

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} -\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}, & \forall x \in \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\Gamma} = \boldsymbol{g}, \\ \boldsymbol{u}\ \text{有界, 当}\ |x| \to \infty. \end{cases}$$

二维 Stokes 方程组外问题的提法：

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} -\mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, & \forall x \in \Omega, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & \forall x \in \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\Gamma} = \boldsymbol{g}, \\ \boldsymbol{u}\ \text{有界, 当}\ |x| \to \infty, \\ p \to 0,\ \text{当}\ |x| \to \infty. \end{cases}$$

在三维情况下，$\Omega \subset R^3$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)^{\mathrm{T}}$。三维 Navier 方程组和 Stokes 方程组外问题的提法：

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{cases} -\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}, & \forall x \in \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\Gamma} = \boldsymbol{g}, \\ \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{0},\ \text{当}\ |x| \to \infty, \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{cases} -\mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, & \forall x \in \Omega, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, & \forall x \in \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\Gamma} = \boldsymbol{g}, \\ \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{0}, & \text{当}\ |x| \to \infty, \\ p \to 0, & \text{当}\ |x| \to \infty. \end{cases}$$

在下面的讨论中假设向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的支集是紧的，而且 Supp $\boldsymbol{f}(x) \subset B_0$。在已知函数 $\boldsymbol{g}(x)$，$\boldsymbol{f}(x)$ 满足适当正则性条件下，问题 (I)～(IV) 存在唯一解。

附注 这里要特别注意二维外问题与三维外问题无穷远处边界条件的提法是不同的。如果将二维外问题中无穷远处的边界条件

$$\boldsymbol{u}\text{有界，当 } |x| \to \infty,$$

改变为：

$$\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{0}, \text{当 } |x| \to \infty,$$

那么对应的二维 Navier 方程组外问题和二维 Stokes 方程组外问题一般讲没有解。即在流体力学中不能应用二维 Stokes 方程组的外问题模拟二维绕流问题，这是大家熟知的 Stokes 佯谬 (Happel and Brenner, 1983)。

2.2 二维 Navier 方程组的外问题

在这一节中考虑二维 Navier 方程组的外问题 (I)，并假设 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$。

$$-\mu\Delta u_1 - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big) = f_1(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.2.1}$$

$$-\mu\Delta u_2 - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big) = f_2(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.2.2}$$

$$u_1|_\Gamma = 0, \quad u_2|_\Gamma = 0, \tag{2.2.3}$$

$$u_1, u_2 \text{ 有界，当 } |x| \to \infty \text{ 时}. \tag{2.2.4}$$

引进人工边界 $\Gamma_R = \{x||x| = R,\ R > R_0\}$，$\Gamma_R$ 将 Ω 分割为有界的计算区域 Ω_i 和无界区域 $\Omega_e = \Omega\backslash\bar{\Omega}_i$ (见图 1-1)，并且 $f_1(x) \equiv 0, f_2(x) \equiv 0, \forall x \in \Omega_e$。本节的第一个任务是寻找问题 (2.2.1)～(2.2.4) 的解 $(u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ 在人工边界 Γ_R 上满足的准确边界条件及高精度的近似人工边界条件 (Han and Wu, 1992)。

2.2.1 人工边界 $\boldsymbol{\Gamma_R}$ 上的整体边界条件

问题 (2.2.1)～(2.2.4) 的解 $(u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ 在区域 Ω_e 上满足：

$$-\mu\Delta u_1 - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big) = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{2.2.5}$$

$$-\mu\Delta u_2 - (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big) = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{2.2.6}$$

$$u_1|_{\Gamma_R} = u_1(R,\theta), \quad u_2|_{\Gamma_R} = u_2(R,\theta), \tag{2.2.7}$$

$$u_1, u_2 \text{ 是有界的，当 } |x| \to \infty. \tag{2.2.8}$$

如果 $u_1(R,\theta), u_2(R,\theta)$ 已知，则问题 (2.2.5)~(2.2.8) 存在唯一解 $(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$。为了推导在 Γ_R 上的准确边界条件，在下面给出问题 (2.2.5)~(2.2.8) 解的级数表达式。

设 $(u_1(r,\theta), u_2(r,\theta))^{\mathrm{T}}$ 是问题 (2.2.5)~(2.2.8) 的解，则 $u_1(r,\theta)$,$u_2(r,\theta)$ 满足双调和方程，即：

$$\Delta^2 u_1 = 0, \quad \forall x \in \Omega_e,$$
$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad \forall x \in \Omega_e.$$

因而 $u_1(r,\theta), u_2(r,\theta)$ 可表示为：

$$u_1(r,\theta) = (r^2 - R^2)W_1 + G_1, \tag{2.2.9}$$
$$u_2(r,\theta) = (r^2 - R^2)W_2 + G_2, \tag{2.2.10}$$

其中 W_1, W_2, G_1, G_2 是四个待定的调和函数。调和函数 G_1, G_2 可由边界条件 (2.2.7)~(2.2.8) 唯一地确定：

$$G_1(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^{-n}\ , \tag{2.2.11}$$
$$G_2(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta)r^{-n}, \tag{2.2.12}$$

其中，

$$a_n = \frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} u_1(R,\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta, \tag{2.2.13}$$
$$b_n = \frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} u_1(R,\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta, \tag{2.2.14}$$
$$c_n = \frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} u_2(R,\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta, \tag{2.2.15}$$
$$d_n = \frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi} u_2(R,\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta. \tag{2.2.16}$$

进一步来确定调和函数 W_1, W_2，令：

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \Theta := -\kappa P, \tag{2.2.17}$$

其中，

$$\kappa = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \tag{2.2.18}$$

由 Navier 方程组 (2.2.5)~(2.2.6) 可知 P 是一个调和函数，并且，

$$P(r,\theta) = \sum_{n=2}^{\infty}(p_n^1 \cos n\theta + p_n^2 \sin n\theta)r^{-n}, \tag{2.2.19}$$

其中 $p_n^1, p_n^2, n = 2, 3, \cdots$，是待定常数。由等式

$$\Delta u_1 = \Delta\{(r^2 - R^2)W_1\} = 4\frac{\partial}{\partial r}(rW_1),$$

$$\Delta u_2 = \Delta\{(r^2 - R^2)W_2\} = 4\frac{\partial}{\partial r}(rW_2),$$

和方程 (2.2.5)~(2.2.6) 可得到：

$$\frac{\partial}{\partial r}(rW_1) = \frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial x_1}, \tag{2.2.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rW_2) = \frac{1}{4}\frac{\partial P}{\partial x_2}. \tag{2.2.21}$$

由 P 的表示式 (2.2.19) 得到：

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \sum_{n=2}^{\infty}(-n)\{p_n^1 \cos(n+1)\theta + p_n^2 \sin(n+1)\theta\}r^{-n-1}, \tag{2.2.22}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \sum_{n=2}^{\infty}(-n)\{p_n^1 \sin(n+1)\theta - p_n^2 \cos(n+1)\theta\}r^{-n-1}. \tag{2.2.23}$$

由公式 (2.2.20)~(2.2.23) 可得 W_1, W_2 的如下表示式：

$$W_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\{p_n^1 \cos(n+1)\theta + p_n^2 \sin(n+1)\theta\}r^{-n-1}, \tag{2.2.24}$$

$$W_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\{p_n^1 \sin(n+1)\theta - p_n^2 \cos(n+1)\theta\}r^{-n-1}. \tag{2.2.25}$$

直接计算可得：

$$x_1W_1 + x_2W_2 = \frac{1}{4}P. \tag{2.2.26}$$

另一方面由 P 的定义 (2.2.17) 可知：

$$-\kappa P = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2(x_1W_1 + x_2W_2) + (r^2 - R^2)\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}.$$

将式 (2.2.26) 代入上式得到：

$$-\left(\kappa + \frac{1}{2}\right)P = (r^2 - R^2)\left(\frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \frac{\partial W_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}.$$

在人工边界 Γ_R 上，由上式可得

$$\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)P|_{\Gamma_R}=-\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}+\frac{\partial G_2}{\partial x_2}\right)\bigg|_{\Gamma_R}. \tag{2.2.27}$$

由于 P 与 $\dfrac{\partial G_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial G_2}{\partial x_2}$ 都是 Ω_e 上的有界调和函数，故在 Ω_e 上：

$$\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)P=-\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1}+\frac{\partial G_2}{\partial x_2}\right), \tag{2.2.28}$$

并且，

$$\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)p_n^1=(n-1)(a_{n-1}-d_{n-1}),$$

$$\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)p_n^2=(n-1)(b_{n-1}+c_{n-1}),\quad n=2,3,\cdots$$

至此我们得到了圆外区域 Ω_e 上问题 (2.2.5)~(2.2.8) 的解 $(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$ 的级数形式。

我们进一步分析在人工边界 Γ_R 上的应力，由 Hooke 定律：

$$\sigma_{11}=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \tag{2.2.29}$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right), \tag{2.2.30}$$

$$\sigma_{22}=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \tag{2.2.31}$$

由上式可得到作用在边界 Γ_R 上的外法向应力 $\boldsymbol{\sigma}_n=(\sigma_n^1,\sigma_n^2)^{\mathrm{T}}$：

$$\sigma_n^1=\sigma_{11}\cos\theta+\sigma_{12}\sin\theta, \tag{2.2.32}$$

$$\sigma_n^2=\sigma_{21}\cos\theta+\sigma_{22}\sin\theta. \tag{2.2.33}$$

综合 (2.2.9)~(2.2.10), (2.2.17), (2.2.29)~(2.2.33) 得到：

$$\begin{aligned}\sigma_n^1&=\left\{\mu\frac{\partial u_1}{\partial r}-\lambda\kappa P\cos\theta+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cos\theta+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\sin\theta\right)\right\}\bigg|_{\Gamma_R}\\&=\left\{\mu\frac{\partial u_1}{\partial r}-\lambda\kappa P\cos\theta+2\mu x_1(W_1\cos\theta+W_2\sin\theta)+\mu\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\cos\theta\right.\\&\qquad\left.+\mu\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\sin\theta\right\}\bigg|_{\Gamma_R}\\&=\mu\left\{\frac{\partial u_1}{\partial r}-P\cos\theta+\frac{3\mu+\lambda}{2(\lambda+\mu)}P\cos\theta+\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\cos\theta+\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\sin\theta\right\}\bigg|_{\Gamma_R}.\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

进一步通过计算可得：

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - P\cos\theta\right)\bigg|_{\Gamma_R} = 2RW_1(R,\theta) + \frac{\partial G_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} - P(R,\theta)\cos\theta$$
$$= \frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\partial G_1}{\partial r}\bigg|_{r=R} + \frac{1}{(1+2\kappa)}\frac{\partial G_2}{\partial \theta}\bigg|_{r=R}. \tag{2.2.35}$$

由等式 (2.2.28) 可得：

$$\frac{3\mu+\lambda}{2(\lambda+\mu)}P(R,\theta)\cos\theta = \frac{3\mu+\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{2}{1+2\kappa}\left(-\frac{\partial G_1}{\partial x_1} - \frac{\partial G_2}{\partial x_2}\right)\bigg|_{\Gamma_R}\cos\theta$$
$$= -\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}\right)\bigg|_{\Gamma_R}\cos\theta. \tag{2.2.36}$$

将式 (2.2.35), (2.2.36) 代入式 (2.2.34) 我们得到：

$$\sigma_n^1(u_1|_{\Gamma_R}, u_2|_{\Gamma_R}) = \mu\left(\frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\partial G_1}{\partial r} - \frac{2\kappa}{(1+2\kappa)R}\frac{\partial G_2}{\partial \theta}\right)\bigg|_{\Gamma_R}. \tag{2.2.37}$$

完全类似地可得：

$$\sigma_n^2(u_1|_{\Gamma_R}, u_2|_{\Gamma_R}) = \mu\left(\frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\partial G_2}{\partial r} + \frac{2\kappa}{(1+2\kappa)R}\frac{\partial G_1}{\partial \theta}\right)\bigg|_{\Gamma_R}. \tag{2.2.38}$$

将等式 (2.2.13)~(2.2.16) 代入等式 (2.2.11)~(2.2.12)，然后将其代入式 (2.2.37)~(2.2.38) 我们得到外问题 (2.2.1)~(2.2.4) 在人工边界 Γ_R 上满足的准确整体人工边界条件：

$$\sigma_n^1(u_1|_{\Gamma_R}, u_2|_{\Gamma_R}) = \frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\int_0^{2\pi} u_1(R,\phi)\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$+\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^{2\pi} u_2(R,\phi)\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$\equiv T_1(u_1|_{\Gamma_R}, u_2|_{\Gamma_R}), \tag{2.2.39}$$
$$\sigma_n^2(u_1|_{\Gamma_R}, u_2|_{\Gamma_R}) = \frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\int_0^{2\pi} u_2(R,\phi)\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$-\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^{2\pi} u_1(R,\phi)\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$\equiv T_2(u_1|_{\Gamma_R}, u_2|_{\Gamma_R}). \tag{2.2.40}$$

将等式 (2.2.39)~(2.2.40) 中的积分进行分部积分可得到另外两种等价形式：

$$\sigma_n^1(u_1|_{\Gamma_R}, u_2|_{\Gamma_R}) = \frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$

$$-\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi, \tag{2.2.41}$$

$$\sigma_n^2(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R})=\frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$+\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi, \tag{2.2.42}$$

$$\sigma_n^1(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R})=\frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u_1(R,\phi)}{\partial\phi^2}\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$-\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi, \tag{2.2.43}$$

$$\sigma_n^2(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R})=\frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u_2(R,\phi)}{\partial\phi^2}\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$+\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi. \tag{2.2.44}$$

在实际计算中，对准确人工边界条件中的无穷级数通常仅取有限项，例如取前 N 项，$N=0,1,2,\cdots$，我们可得到一系列近似的整体人工边界条件：

$$\sigma_n^1(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R})=\frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}(-n)\int_0^{2\pi}u_1(R,\phi)\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$+\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}n\int_0^{2\pi}u_2(R,\phi)\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$\equiv T_1^N(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R}), \tag{2.2.45}$$

$$\sigma_n^2(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R})=\frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}(-n)\int_0^{2\pi}u_2(R,\phi)\cos n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$-\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}n\int_0^{2\pi}u_1(R,\phi)\sin n(\theta-\phi)\mathrm{d}\phi$$
$$\equiv T_2^N(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R}). \tag{2.2.46}$$

由准确边界条件 (2.2.41)~(2.2.42) 和式 (2.2.43)~(2.2.44) 也可得与 (2.2.45)~(2.2.46) 等价的近似人工边界条件。应用这些边界条件中的任何一个都可以将原始外问题 (2.2.1)~(2.2.4) 归化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题。

2.2.2 有界区域上的简化问题

应用准确边界条件 (2.2.39)~(2.2.40)，外问题 (2.2.1)~(2.2.4) 的解 $(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$

在有界计算区域 Ω_i 上满足下面的边值问题：

$$-\mu\Delta u_1-(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big)=f_1(x),\quad \forall x\in\Omega_i, \tag{2.2.47}$$

$$-\mu\Delta u_2-(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big)=f_2(x),\quad \forall x\in\Omega_i, \tag{2.2.48}$$

$$u_1|_\Gamma=0,\quad u_2|_\Gamma=0, \tag{2.2.49}$$

$$\sigma_n^1(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R})=T_1(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R}), \tag{2.2.50}$$

$$\sigma_n^2(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R})=T_2(u_1|_{\Gamma_R},u_2|_{\Gamma_R}). \tag{2.2.51}$$

应用近似人工边界条件 (2.2.45)~(2.2.46)，外问题 (2.2.1)~(2.2.4) 被近似地简化为有界区域 Ω_i 上的如下边值问题：

$$-\mu\Delta u_1^N-(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial u_1^N}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^N}{\partial x_2}\Big)=f_1(x),\quad \forall x\in\Omega_i, \tag{2.2.52}$$

$$-\mu\Delta u_2^N-(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u_1^N}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2^N}{\partial x_2}\Big)=f_2(x),\quad \forall x\in\Omega_i, \tag{2.2.53}$$

$$u_1^N|_\Gamma=0,\quad u_2^N|_\Gamma=0, \tag{2.2.54}$$

$$\sigma_n^1(u_1^N|_{\Gamma_R},u_2^N|_{\Gamma_R})=T_1^N(u_1^N|_{\Gamma_R},u_2^N|_{\Gamma_R}), \tag{2.2.55}$$

$$\sigma_n^2(u_1^N|_{\Gamma_R},u_2^N|_{\Gamma_R})=T_2^N(u_1^N|_{\Gamma_R},u_2^N|_{\Gamma_R}). \tag{2.2.56}$$

引进空间 $V_0=\{v\mid v\in H^1(\Omega_i),v|_\Gamma=0\}$，并且 $\boldsymbol{V}_0=V_0\times V_0$。$V_0$ 是 $H^1(\Omega_i)$ 的子空间，$\boldsymbol{V}_0$ 是 $H^1(\Omega_i)\times H^1(\Omega_i)$ 的子空间。对 $\boldsymbol{V}_0$ 中的任一元素 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)^{\mathrm T}$，范数 $\|\boldsymbol{v}\|_v$ 的定义如下：

$$\|\boldsymbol{v}\|_v^2=\int_{\Omega_i}[v_1^2+v_2^2+|\nabla v_1|^2+|\nabla v_2|^2]\mathrm{d}x. \tag{2.2.57}$$

边值问题 (2.2.47)~(2.2.51) 等价于下面的变分问题：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{找 }\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm T}\in V_0,\text{ 使}\\ A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\displaystyle\int_{\Omega_i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x,\quad \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0,\end{array}\right. \tag{2.2.58}$$

其中，

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_{\Omega_i}\Big\{\lambda\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)+2\mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)$$
$$+\mu\Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big)\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big)\Big\}\mathrm{d}x,$$

$$
\begin{aligned}
B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = & \frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_1(R,\theta)}{\partial\theta}\right. \\
& \left.+\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_2(R,\theta)}{\partial\theta}\right]\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\
& +\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_1(R,\theta)}{\partial\theta}\right. \\
& \left.+\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_2(R,\theta)}{\partial\theta}\right]\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

进一步令：

$$
\begin{aligned}
B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = & \frac{2+2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_1(R,\theta)}{\partial\theta}\right. \\
& \left.+\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_2(R,\theta)}{\partial\theta}\right]\frac{\cos n(\theta-\phi)}{n}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\
& +\frac{2\kappa}{1+2\kappa}\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_1(R,\theta)}{\partial\theta}\right. \\
& \left.+\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\frac{\partial v_2(R,\theta)}{\partial\theta}\right]\frac{\sin n(\theta-\phi)}{n}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

则近似问题 (2.2.52)～(2.2.56) 等价于下面变分问题：

$$
\left\{\begin{array}{l}
\text{找 } \boldsymbol{u}^N \in V_0, \text{ 使} \\
A(\boldsymbol{u}^N,\boldsymbol{v}) + B_N(\boldsymbol{u}^N,\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_{\Omega_i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \quad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_0.
\end{array}\right. \tag{2.2.59}
$$

从双线性形式 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的定义可知它们是对称的。为讨论变分问题 (2.2.58) 和变分问题 (2.2.59) 解的存在唯一性，需要对上述三个双线性形式的性质进行深入的讨论。我们有 (见 Han and Wu, 1992, Han and Bao 2001)：

引理 2.2.1 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 是定义在 $\boldsymbol{V}_0\times\boldsymbol{V}_0$ 上对称、有界的双线性形式并满足强制性，即存在常数 $M_0>0,\alpha_0>0$，使：

$$
|A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leqslant M_0 \parallel \boldsymbol{u} \parallel_v \parallel \boldsymbol{v} \parallel_v, \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0, \tag{2.2.60}
$$

$$
A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geqslant \alpha_0 \parallel \boldsymbol{v} \parallel_v^2, \quad \forall \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0. \tag{2.2.61}
$$

证明 双线性形式 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的对称性和有界性可由定义直接得到，$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的强制性即估计式 (2.2.61) 可由 Korn 不等式得到。 ■

对双线性形式 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 和 $B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 我们有:

引理 2.2.2　$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 和 $B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 是定义于 $\boldsymbol{V}_0\times\boldsymbol{V}_0$ 上的对称、有界双线性形式，即存在常数 $M_1>0$，使

$$|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant M_1\parallel \boldsymbol{u}\parallel_v\parallel \boldsymbol{v}\parallel_v,\quad \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0, \tag{2.2.62}$$

$$|B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant M_1\parallel \boldsymbol{u}\parallel_v\parallel \boldsymbol{v}\parallel_v,\quad \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0. \tag{2.2.63}$$

而且，

$$B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqslant 0,\quad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0, \tag{2.2.64}$$

$$B_N(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqslant 0,\quad \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0. \tag{2.2.65}$$

证明　由 Sobolev 空间 $H^S(\varGamma_R)$ 的一个等价范数定义 (Lions, 1971):

$$\forall u_1(R,\theta)\in H^S(\varGamma_R)\Leftrightarrow u_1(R,\theta)=\frac{a_0^1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^1\cos n\theta+b_n^1\sin n\theta),$$

并且，

$$\parallel u_1\parallel_{S,\varGamma_R}^2=\frac{(a_0^1)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2S}\left[(a_n^1)^2+(b_n^1)^2\right]<\infty, \tag{2.2.66}$$

$$|u_1|_{S,\varGamma_R}^2=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2)^S\left[(a_n^1)^2+(b_n^1)^2\right]. \tag{2.2.67}$$

$\parallel u_1\parallel_{S,\varGamma_R}$ 和 $|u_1|_{S,\varGamma_R}$ 是空间 $H^S(\varGamma_R)$ 的一个等价范数和半范数，其中 $S\geqslant 0$。对于任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_0$，由迹定理可知，$u_1|_{\varGamma_R},u_2|_{\varGamma_R},v_1|_{\varGamma_R},v_2|_{\varGamma_R}\in H^{1/2}(\varGamma_R)$。将它们展开为傅氏级数可得;

$$u_i|_{\varGamma_R}=u_i(R,\theta)=\frac{a_0^i}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^i\cos n\theta+b_n^i\sin n\theta),\ i=1,2, \tag{2.2.68}$$

$$v_i|_{\varGamma_R}=v_i(R,\theta)=\frac{c_0^i}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^i\cos n\theta+d_n^i\sin n\theta),\ i=1,2. \tag{2.2.69}$$

由 $H^{1/2}(\varGamma_R)$ 中等价范数 $\parallel\cdot\parallel_{1/2,\varGamma_R}$ 的定义 (2.2.66) 可得:

$$\parallel u_i(R,\theta)\parallel_{1/2,\varGamma_R}=\left\{\frac{(a_0^i)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n[(a_n^i)^2+(b_n^i)^2]\right\}^{1/2}<\infty,\ i=1,2, \tag{2.2.70}$$

$$\parallel v_i(R,\theta)\parallel_{1/2,\varGamma_R}=\left\{\frac{(c_0^i)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}n[(c_n^i)^2+(d_n^i)^2]\right\}^{1/2}<\infty,\ i=1,2. \tag{2.2.71}$$

将等式 (2.2.68)~(2.2.69) 代入双线性形式 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，通过直接计算可得：

$$
\begin{aligned}
|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| =& \left|\frac{2(1+\kappa)\pi\mu}{1+2\kappa}\sum_{n=1}^{\infty} n\{a_n^1c_n^1+b_n^1d_n^1+a_n^2c_n^2+b_n^2d_n^2\}\right. \\
&\left.+\frac{2\kappa\pi\mu}{1+2\kappa}\sum_{n=1}^{\infty} n\{a_n^1d_n^2-b_n^1c_n^2-a_n^2d_n^1+b_n^2c_n^1\}\right| \\
\leqslant& \frac{4(1+\kappa)\pi\mu}{1+2\kappa}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n[(a_n^1)^2+(b_n^1)^2+(a_n^2)^2+(b_n^2)^2]\right\}^{1/2} \\
&\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n[(c_n^1)^2+(d_n^1)^2+(c_n^2)^2+(d_n^2)^2]\right\}^{1/2} \\
\leqslant& \frac{4(1+\kappa)\pi\mu}{1+2\kappa}\|\,\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}\,\|_{1/2,\Gamma_R}\|\,\boldsymbol{v}|_{\Gamma_R}\,\|_{1/2,\Gamma_R} \\
\leqslant& C\frac{4(1+\kappa)\pi\mu}{1+2\kappa}\|\,\boldsymbol{u}\,\|_v\|\,\boldsymbol{v}\,\|_v,
\end{aligned}
$$

最后的不等式由迹定理得到，其中 $C>0$ 是一个常数，在不同的地方可以取不同的值。$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的有界性 (2.2.62) 获证。特别地，我们得到：

$$
\begin{aligned}
B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) =& \frac{2\pi\mu}{(1+2\kappa)}\sum_{n=1}^{\infty} n\{(a_n^1)^2+(b_n^1)^2+(a_n^2)^2+(b_n^2)^2+\kappa(a_n^1+b_n^2)^2 \\
&+\kappa(b_n^1-a_n^2)^2\}\geqslant 0, \quad \forall \boldsymbol{u}\in \boldsymbol{V}_0.
\end{aligned}
$$

对于双线性形式 $B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, 类似地可得到 (2.2.63) 和 (2.2.65)。 ∎

下面我们估计 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 与 $B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的误差，其中 $\boldsymbol{u}$ 是原问题 (2.2.1)~(2.2.4) 的解。我们有：

$$
\begin{aligned}
&|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \\
=& \left|\frac{2(1+\kappa)\pi\mu}{1+2\kappa}\sum_{n=N+1}^{\infty} n\{a_n^1c_n^1+b_n^1d_n^1+a_n^2c_n^2+b_n^2d_n^2\}\right. \\
&\left.+\frac{2\kappa\pi\mu}{1+2\kappa}\sum_{n=N+1}^{\infty} n\{a_n^1d_n^1-b_n^1c_n^2-a_n^2d_n^1+b_n^2c_n^1\}\right| \\
\leqslant& \frac{4(1+\kappa)\pi\mu}{1+2\kappa}\left\{\sum_{n=N+1}^{\infty} n\big[(a_n^1)^2+(b_n^1)^2+(a_n^2)^2+(b_n^2)^2\big]\right\}^{1/2} \\
&\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n\big[(c_n^1)^2+(d_n^1)^2+(c_n^2)^2+(d_n^2)^2\big]\right\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{4(1+\kappa)\pi\mu}{(1+2\kappa)}\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty} n\big[(a_n^1)^2+(b_n^1)^2+(a_n^2)^2+(b_n^2)^2\big]\Big\}^{1/2} \\
&\quad \cdot \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} n\big[(c_n^1)^2+(d_n^1)^2+(c_n^2)^2+(d_n^2)^2\big]\Big\}^{1/2} \\
&\leqslant C\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty} n\big[(a_n^1)^2+(b_n^1)^2+(a_n^2)^2+(b_n^2)^2\big]\Big\}^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{1/2,\Gamma_R} \\
&\leqslant C\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty} n\big[(a_n^1)^2+(b_n^1)^2+(a_n^2)^2+(b_n^2)^2\big]\Big\}^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_{v}, \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_0.
\end{aligned} \tag{2.2.72}
$$

进一步我们知道在区域 $r\geqslant R_0$ 上 $\boldsymbol{u}$ 满足齐次 Navier 方程组 (2.2.5)~(2.2.6)。将 $\boldsymbol{u}$ 在 $\Gamma_0(\Gamma_0=\{x\mid |x|=R_0\})$ 上的值展开为傅氏级数可得：

$$
u_i(R_0,\theta)=\frac{p_o^i}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n^i\cos n\theta+q_n^i\sin n\theta), \quad i=1,2.
$$

通过类似于在 2.2.1 节的讨论，在区域 $r\geqslant R_0$ 上原问题的解 $\boldsymbol{u}$ 可以由傅氏系数 $\{p_n^i,q_n^i\}$ 表示出来。特别地，当 $r=R$ 时，有：

$$
u_i(R,\theta)=\frac{a_o^i}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^i\cos n\theta+b_n^i\sin n\theta), \quad i=1,2,
$$

其中，

$$
a_n^1=\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^n\begin{cases} p_n^1, & n=0,1,2, \\ p_n^1+\dfrac{(n-2)(R^2-R_0^2)}{2(2\kappa+1)R_0^2}(p_{n-2}^1-q_{n-2}^2), & n\geqslant 3, \end{cases}
$$

$$
b_n^1=\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^n\begin{cases} q_n^1, & n=1,2 \\ q_n^1+\dfrac{(n-2)(R^2-R_0^2)}{2(2\kappa+1)R_0^2}(q_{n-2}^1-p_{n-2}^2), & n\geqslant 3, \end{cases}
$$

$$
a_n^2=\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^n\begin{cases} p_n^2, & n=0,1,2 \\ p_n^2+\dfrac{(n-2)(R^2-R_0^2)}{2(2\kappa+1)R_0^2}(q_{n-2}^1-p_{n-2}^2), & n\geqslant 3, \end{cases}
$$

$$
b_n^2=\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^n\begin{cases} q_n^2, & n=1,2 \\ q_n^2+\dfrac{(n-2)(R^2-R_0^2)}{2(2\kappa+1)R_0^2}(p_{n-2}^1-q_{n-2}^2), & n\geqslant 3, \end{cases}
$$

将上述 $\{a_n^1,b_n^1,a_n^2,b_n^2\}$ 的表达式代入 (2.2.72) 可得：

$$|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant C\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{\max\{1,N-1\}}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}n^3\big[(p_n^1)^2+(q_n^1)^2+(p_n^2)^2+(q_n^2)^2\big]\Big\}^{1/2}\|\boldsymbol{v}\|_v$$
$$\leqslant C\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{\max\{1,N-1\}}|\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0}\|\boldsymbol{v}\|_v,\quad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_0.$$

立刻可得下述引理：

引理 2.2.3 下面估计式成立

$$|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant C\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{\max\{1,N-1\}}|\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0}\|\boldsymbol{v}\|_v,\quad \forall \boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}_0 \tag{2.2.73}$$

其中 C 是一个不依赖于 N 的常数。 ■

综合引理 2.2.1~2.2.3 的结果，应用 Lax-Milgram 定理可得：

定理 2.2.1 假设 $f_1,f_2\in H^{-1}(\Omega_i)$，则变分问题 (2.2.58) 存在唯一解 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}_0$，且变分问题 (2.2.59) 亦存在唯一解 $\boldsymbol{u}^N\in\boldsymbol{V}_0$。若进一步假设 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_0}\in H^{3/2}(\Gamma_0)\times H^{3/2}(\Gamma_0)$，则下面的误差估计式成立：

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^N\|< C\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{\max\{1,N-1\}}|\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0}. \tag{2.2.74}$$

■

2.2.3 简化问题 (2.2.59) 的有限元近似

在这一节中我们讨论有界计算区域 Ω_i 上简化问题 (2.2.59) 的有限元近似。为了叙述上的方便，在这一节中设 Γ 是一个多角形区域的边界。为了构造 $\boldsymbol{V}_0$ 的有限元子空间，首先将有界区域 Ω_i 剖分为有限个三角形单元，由于圆周 Γ_R 是 Ω_i 的边界的一部分，对 Ω_i 进行三角剖分后所得到的三角形单元中有一部分为曲边三角形，记 J_h 为所有三角形单元组成的集合并满足：

$$\overline{\Omega}_i=\Big(\bigcup_{K\in J_h}K\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{\widetilde{K}\in J_h}\widetilde{K}\Big), \tag{2.2.75}$$

其中 K 为三角形单元，$\widetilde{K}$ 为曲边三角形单元，它的一条曲边在人工边界 Γ_R 上。假设剖分 J_h 满足：

$$\frac{h_K}{\rho_K}<\gamma,\quad \forall K,\widetilde{K}\in J_h, \tag{2.2.76}$$

其中 γ 为一正常数，h_K 为三角形单元的直径，ρ_K 为三角形单元内切圆的直径，并且 $h=\max_{K,\widetilde{K}\in J_h}\{h_k\}$。首先在区域 Ω_i 上引进 V_0 的有限元子空间 V_0^h：

$$V_0^h=\{v|\ v\in V_0,\quad v|_K \text{ 和 } v|_{\widetilde{K}} \text{ 是线性函数},\quad \forall K,\widetilde{K}\in J_h\}. \tag{2.2.77}$$

令：

$$\boldsymbol{V}_0^h = V_0^h \times V_0^h, \tag{2.2.78}$$

$\boldsymbol{V}_0^h$ 是 $\boldsymbol{V}_0$ 的一个有限元子空间。在变分问题 (2.2.59) 中用 $\boldsymbol{V}_0^h$ 代替 $\boldsymbol{V}_0$，我们得到变分问题 (2.2.59) 的有限元近似。

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{u}^{N,h} \in \boldsymbol{V}_0^h, \text{ 使} \\ A(\boldsymbol{u}^{N,h}, \boldsymbol{v}) + B_N(\boldsymbol{u}^{N,h}, \boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_{\Omega_i} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0^h. \end{cases} \tag{2.2.79}$$

由 Lax-Milgram 定理可得：

定理 2.2.2　变分问题 (2.2.79) 存在唯一解 $\boldsymbol{u}^{N,h} \in \boldsymbol{V}_0^h$。■

进一步我们可得到下面的误差估计：

定理 2.2.3　设 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ 是原问题 (2.2.1)~(2.2.4) 的解，并且在区域 Ω_i 上 $u_j \in H^2(\Omega_i)$ $(j = 1, 2)$，则下面误差估计式成立：

$$\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{N,h} \|_v \leqslant C\left\{ h|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega_i} + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}} |\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0} \right\}, \tag{2.2.80}$$

其中常数 $C > 0$，不依赖于 N 和 h。

证明　由变分等式 (2.2.58) 和 (2.2.79) 可得：

$$A(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{N,h}, \boldsymbol{v}) + B_N(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{N,h}, \boldsymbol{v}) = B_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0^h. \tag{2.2.81}$$

对任意 $\boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{V}_0^h$，应用等式 (2.2.81)，估计式 (2.2.60)~(2.2.63) 和 (2.2.73) 可得：

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^* \|_v^2 \leqslant & \frac{1}{\alpha_0} \{ A(\boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*) \\ & + B_N(\boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*) \} \\ = & \frac{1}{\alpha_0} \{ A(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*) + B_N(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*) \\ & + B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*) - B_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^*) \} \\ \leqslant & \frac{M_0 + M_1}{\alpha_0} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^* \|_v \| \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^* \|_v \\ & + \frac{C}{\alpha_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}} \| \boldsymbol{u} \|_{3/2,\Gamma_0} \| \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^* \|_v . \end{aligned}$$

因而我们可得：

$$\| \boldsymbol{u}^{N,h} - \boldsymbol{v}^* \| \leqslant \frac{M_0 + M_1}{\alpha_0} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^* \|_V + \frac{C}{\alpha_0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}} \| \boldsymbol{u} \|_{3/2,\Gamma_0}, \quad \forall \boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{V}_0^h.$$

应用三角不等式

$$\| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{N,h} \| \leqslant \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^* \|_V + \| \boldsymbol{u}^{N,h}-\boldsymbol{v}^* \|, \quad \forall \boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{V}_0, \tag{2.2.82}$$

可得:

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{N,h} \| \leqslant & \left(1+\frac{M_0+M_1}{\alpha_0}\right) \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^* \|_v \\ & +\frac{C}{\alpha_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}} \| \boldsymbol{u} \|_{3/2,\Gamma_0}, \ \forall \boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{V}_0^h, \end{aligned}$$

即:

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{N,h} \| \leqslant & \left(1+\frac{M_0+M_1}{\alpha_0}\right) \inf_{\boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{V}_0^h} \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^* \|_v \\ & +\frac{C}{\alpha_0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}} \| \boldsymbol{u} \|_{3/2,\Gamma_0}. \end{aligned}$$

最后由有限元子空间 V_0^h 的逼近性质可得估计式 (2.2.80)。 ■

附注 2.2.1 估计式 (2.2.80) 中的常数 C 对 R (R 表示人工边界的位置) 的依赖关系在定理 2.2.3 中没有给出，原因是没有对引理 2.2.1~2.2.3 中的常数 α_0, M_0, M_1, C 对 R 的依赖关系进行深入的讨论。在论文 (Han and Bao, 2000) 中，对这一问题进行了深入的讨论，得到了误差对 N (人工边界条件精度), h (单元尺寸), R (人工边界的位置) 的依赖关系。

2.3 二维 Stokes 方程组的外问题

我们考虑二维 Stokes 方程组外问题 (II), 并假设 $\boldsymbol{g}(x)=0$:

$$-2\mu\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})+\nabla p=\boldsymbol{f}, \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.3.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}=0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.3.2}$$

$$\boldsymbol{u}|_\Gamma=\boldsymbol{0}, \tag{2.3.3}$$

$$\boldsymbol{u}\ \text{有界，当}|x| \to \infty, \tag{2.3.4}$$

$$p \to 0,\ \text{当}|x| \to \infty. \tag{2.3.5}$$

方程 (2.3.1) 是方程 (2.1.14) 的等价形式。我们引进人工边界 $\Gamma_R=\{x \mid |x|=R,\ R>R_0\}$, Γ_R 将区域 Ω 分割为有界的计算区域 Ω_i 和无界区域 $\Omega_e=\Omega\backslash\overline{\Omega}_i$ (见图 1-1), 并且假设 $\boldsymbol{f}(x)=0, \forall x \in \Omega_e$。首先讨论 Stokes 外问题 (2.3.1)~(2.3.5) 在人工边界 Γ_R 上的准确整体人工边界条件和高精度的近似整体人工边界条件。

2.3.1　高精度的近似整体人工边界条件

考虑问题 (2.3.1)~(2.3.5) 的解 $(\boldsymbol{u}, p)$ 在区域 Ω_e 上的限制，$(\boldsymbol{u}, p)$ 满足：

$$-2\mu\nabla\cdot\varepsilon(\boldsymbol{u})+\nabla p=\boldsymbol{0},\quad \forall x\in\Omega_e, \tag{2.3.6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\quad \forall x\in\Omega_e, \tag{2.3.7}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}=\boldsymbol{u}(R,\theta), \tag{2.3.8}$$

$$\boldsymbol{u}\ \text{有界},\quad \text{当}|x|\to\infty, \tag{2.3.9}$$

$$p\to 0,\quad \text{当}|x|\to\infty. \tag{2.3.10}$$

由于位移向量在人工边界上的值 $\boldsymbol{u}(R,\theta)=(u_1(R,\theta),u_2(R,\theta))^{\mathrm{T}}$ 是未知的，边值问题 (2.3.6)~(2.3.10) 不能独立求解。如果 $\boldsymbol{u}(R,\theta)$ 已知，则边值问题 (2.3.6)~(2.3.10) 存在唯一解 $(\boldsymbol{u}, p)$, 通过下面的分析我们给出 $(\boldsymbol{u}, p)$ 的级数表达式。假设位移向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$ 有下面的形式：

$$u_j=(r^2-R^2)\frac{\partial W}{\partial x_j}+G_j,\quad j=1,2, \tag{2.3.11}$$

其中 G_1, G_2, W 是 Ω_e 上三个待定的调和函数。

首先应用边界条件 (2.3.8) 和 (2.3.9)，调和函数 G_1, G_2 可以由下述边值问题唯一确定 $(j=1,2)$：

$$\Delta G_j=0,\quad \forall x\in\Omega_e, \tag{2.3.12}$$

$$G_j|_{\Gamma_R}=u_j(R,\theta), \tag{2.3.13}$$

$$G_j\ \text{有界，当}|x|\to\infty. \tag{2.3.14}$$

进一步可得到：

$$G_1=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^{-n}, \tag{2.3.15}$$

$$G_2=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)r^{-n}, \tag{2.3.16}$$

其中

$$a_n=\frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi}u_1(R,\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, \tag{2.3.17}$$

$$b_n=\frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi}u_1(R,\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta, \tag{2.3.18}$$

$$c_n=\frac{R^n}{\pi}\int_0^{2\pi}u_2(R,\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, \tag{2.3.19}$$

$$d_n = \frac{R^n}{\pi} \int_0^{2\pi} u_2(R,\theta) \sin n\theta \mathrm{d}\theta. \tag{2.3.20}$$

为了确定调和函数 W，将 $\boldsymbol{u}$ 的表达式 (2.3.11) 代入方程 (2.3.7)。我们得到：

$$2x_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial W}{\partial x_2} = -\Big(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}\Big),$$

即：

$$r\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}\Big). \tag{2.3.21}$$

由 G_1, G_2 的表达式 (2.3.15)~(2.3.16) 通过计算可得：

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\{(a_n - d_n)\cos(n+1)\theta + (b_n + c_n)\sin(n+1)\theta\} r^{-n-1},$$

因而由等式 (2.3.21) 可得到 W：

$$W = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)}\big\{(a_n - d_n)\cos(n+1)\theta + (b_n + c_n)\sin(n+1)\theta\big\} r^{-n-1}. \tag{2.3.22}$$

为了得到压力 p，将 $\boldsymbol{u}$ 的表达式 (2.3.11) 代入方程 (2.3.6)，我们得到：

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \Delta u_1 = 4\mu \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(x_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial W}{\partial x_2}\Big),$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \Delta u_2 = 4\mu \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(x_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial W}{\partial x_2}\Big).$$

进一步考虑到边界条件 $p \to 0$，当 $|x| \to \infty$ 时，我们得到：

$$\begin{aligned} p &= 4\mu\Big(x_1 \frac{\partial W}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial W}{\partial x_2}\Big) = 4\mu r \frac{\partial W}{\partial r} \\ &= 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} n\big\{(a_n - d_n)\cos(n+1)\theta + (b_n + c_n)\sin(n+1)\theta\big\} r^{-n-1}. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

对于给定的 $\boldsymbol{u}(R,\theta)$，我们得到问题 (2.3.6)~(2.3.10) 的唯一解 $(\boldsymbol{u}, p)$，$\boldsymbol{u}$ 由式 (2.3.11) 给出，p 由 (2.3.23) 给出。进一步我们分析作用在人工边界 Γ_R 上的应力。由式 (2.1.11) 可得：

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}) - p = 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - p, \tag{2.3.24}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}(\boldsymbol{u}) = \mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big), \tag{2.3.25}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = \mu\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big), \tag{2.3.26}$$

$$\sigma_{22} = 2\mu\varepsilon_{22}(\boldsymbol{u}) - p = 2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - p. \tag{2.3.27}$$

由此得到作用在边界 $\varGamma_R$ 上的外法向应力为 $\boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_n^1, \sigma_n^2)^{\mathrm{T}}$：

$$\sigma_n^1 = (\sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta)|_{\varGamma_R},$$

$$\sigma_n^2 = (\sigma_{21}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta)|_{\varGamma_R}.$$

将 (2.3.24)~(2.3.27) 代入上式可得：

$$\sigma_n^1 = \left\{\left(2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - p\right)\cos\theta + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\sin\theta\right\}\bigg|_{\varGamma_R}, \tag{2.3.28}$$

$$\sigma_n^2 = \left\{\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos\theta + \left(2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - p\right)\sin\theta\right\}\bigg|_{\varGamma_R}. \tag{2.3.29}$$

将 $\boldsymbol{u}$ 的表达式 (2.3.11) 和 p 的表达式 (2.3.23) 代入上式我们得到：

$$\sigma_n^1 = \left\{\mu\frac{\partial G_1}{\partial r} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial G_2}{\partial\theta} - 2\mu\left(\frac{x_2}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta} + x_1\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right\}\bigg|_{\varGamma_R}, \tag{2.3.30}$$

$$\sigma_n^2 = \left\{\mu\frac{\partial G_2}{\partial r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial G_1}{\partial\theta} - 2\mu\left(-\frac{x_1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta} + x_2\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right\}\bigg|_{\varGamma_R}. \tag{2.3.31}$$

通过计算可证明下面等式成立：

$$-2\mu\left(\frac{x_2}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta} + x_1\frac{\partial W}{\partial r}\right)\bigg|_{\varGamma_R} = \mu\left(\frac{\partial G_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_2}{\partial\theta}\right)\bigg|_{\varGamma_R}, \tag{2.3.32}$$

$$-2\mu\left(-\frac{x_1}{r}\frac{\partial W}{\partial\theta} + x_2\frac{\partial W}{\partial r}\right)\bigg|_{\varGamma_R} = \mu\left(\frac{\partial G_2}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial G_1}{\partial\theta}\right)\bigg|_{\varGamma_R}. \tag{2.3.33}$$

将等式 (2.3.32), (2.3.33) 代入 (2.3.30) 和 (2.3.31) 可得：

$$\sigma_n^1 = 2\mu\left.\frac{\partial G_1}{\partial r}\right|_{\varGamma_R}, \tag{2.3.34}$$

$$\sigma_n^2 = 2\mu\left.\frac{\partial G_2}{\partial r}\right|_{\varGamma_R}. \tag{2.3.35}$$

G_1, G_2 是 $\varOmega_e$ 上的调和函数并且 $G_1|_{\varGamma_R} = u_1(R,\theta)$, $G_2|_{\varGamma_R} = u_2(R,\theta)$。由在 1.2.1 节中得到的 Laplace 外问题的 Steklov-Poincare 映射的六个等价形式，作用在人工边界上的法向应力 $\boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_n^1, \sigma_n^2)$ 可由 $u_1(R,\theta)$, $u_2(R,\theta)$ 表示。例如应用 Steklov-Poincare 映射公式 (1.2.15) 可得：

$$\sigma_n^1 = \frac{2\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi \equiv T_1(\boldsymbol{u}|_{\varGamma_R}), \tag{2.3.36}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{2\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi \equiv T_2(\boldsymbol{u}|_{\varGamma_R}). \tag{2.3.37}$$

令：

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) = (T_1(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}), T_2(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}))^{\mathrm{T}},$$

则：

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}). \tag{2.3.38}$$

式 (2.3.38) 就是二维 Stokes 方程组外问题 (2.3.1)~(2.3.5) 的解 $(\boldsymbol{u}, p)$ 在人工边界 Γ_R 上满足的准确边界条件。在等式 (2.3.34)，(2.3.35) 的右端级数中仅取前面 N 项，令：

$$\boldsymbol{T}^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) = (T_1^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}), T_2^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}))^{\mathrm{T}},$$

其中

$$T_1^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) = \frac{2\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}\frac{\partial u_1(R,\phi)}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi, \tag{2.3.39}$$

$$T_2^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) = \frac{2\mu}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{2\pi}\frac{\cos n(\phi-\theta)}{n}\frac{\partial u_2(R,\phi)}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi, \tag{2.3.40}$$

则

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{T}^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}), \quad N = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.3.41}$$

是人工边界 Γ_R 上的一系列近似人工边界条件。

2.3.2 有界计算区域 Ω_i 上的简化问题及其有限元近似

应用边界条件 (2.3.38) 可将原问题 (2.3.1)~(2.3.5) 等价地简化为有界计算区域 Ω_i 上的 Stokes 方程组的边值问题：

$$-2\mu\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \nabla p = \boldsymbol{f}, \quad \forall x \in \Omega_i \tag{2.3.42}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{2.3.43}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma} = \boldsymbol{0}, \tag{2.3.44}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}). \tag{2.3.45}$$

应用人工边界条件 (2.3.41) 可将原问题 (2.3.1)~(2.3.5) 近似地简化为有界计算区域 Ω_i 上的 Stokes 方程组的边值问题：

$$-2\mu\nabla\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^N) + \nabla p^N = \boldsymbol{f}, \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{2.3.46}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^N = 0, \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{2.3.47}$$

$$\boldsymbol{u}^N|_{\Gamma} = \boldsymbol{0}, \tag{2.3.48}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{T}^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}). \tag{2.3.49}$$

引进空间

$$V_0 = \{v | v \in H^1(\Omega_i), \quad v|_\Gamma = 0\}.$$

令:

$$\mathbb{V}_0 = V_0 \times V_0, \quad W = L^2(\Omega_i),$$

则边值问题 (2.3.42)~(2.3.45) 等价于下面的变分问题:

$$\begin{cases} 找(\boldsymbol{u}, p) \in V_0 \times W, 使 \\ A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + A_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + B(p, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, & (2.3.50) \\ B(q, \boldsymbol{u}) = 0, \quad \forall q \in W. & (2.3.51) \end{cases}$$

问题 (2.3.46)~(2.3.49) 等价于如下变分问题:

$$\begin{cases} 找(\boldsymbol{u}^N, p^N) \in \mathbb{V}_0 \times W, 使 \\ A(\boldsymbol{u}^N, \boldsymbol{v}) + A_0^N(\boldsymbol{u}^N, \boldsymbol{v}) + B(p^N, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, & (2.3.52) \\ B(q, \boldsymbol{u}^N) = 0, \quad \forall q \in W, & (2.3.53) \end{cases}$$

其中,

$$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2\mu \int_{\Omega_i} \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{i,j}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{i,j}(\boldsymbol{v}) \mathrm{d}x \equiv 2\mu \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \mathrm{d}x, \tag{2.3.54}$$

$$\begin{aligned} A_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= -\int_{\Gamma_R} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}s \\ &= \frac{2\mu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i(R,\phi)}{\partial \phi} \frac{\partial v_i(R,\theta)}{\partial \theta} \right\} \frac{\cos n(\phi - \theta)}{n} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{2\mu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} n \left\{ \sum_{i=1}^{2} u_i(R,\phi) v_i(R,\theta) \right\} \cos n(\phi - \theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi, \end{aligned} \tag{2.3.55}$$

$$\begin{aligned} A_0^N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \frac{2\mu}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i(R,\phi)}{\partial \phi} \frac{\partial v_i(R,\theta)}{\partial \theta} \right\} \frac{\cos n(\phi - \theta)}{n} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{2\mu}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} n \left\{ \sum_{i=1}^{2} u_i(R,\phi) v_i(R,\theta) \right\} \cos n(\phi - \theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi, \end{aligned} \tag{2.3.56}$$

$$B(q, \boldsymbol{v}) = -\int_{\Omega_i} q \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x. \tag{2.3.57}$$

$A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 是定义于 $\mathbb{V}_0 \times \mathbb{V}_0$ 上的对称有界双线性形式，即存在常数 $M_1 > 0$，使

$$|A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqslant M_1 \| \boldsymbol{u} \|_{\mathbb{V}} \| \boldsymbol{v} \|_{\mathbb{V}}, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0.$$

进一步应用由 Korn 不等式可得 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的强制性，即存在 $\alpha_1>0$，使

$$A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqslant\alpha_1\parallel\boldsymbol{v}\parallel_{\mathbb{V}}^2,\quad\forall v\in V_0.$$

这样在空间 $\mathbb{V}_0$ 中我们可以定义一个新的范数 $\|\cdot\|_*$：

$$\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*=\left(A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\right)^{1/2},\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0.\tag{2.3.58}$$

则双线性形式 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 满足：

$$|A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant\parallel\boldsymbol{u}\parallel_*\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0,\tag{2.3.59}$$

$$A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqslant\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*^2,\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0.\tag{2.3.60}$$

对双线性形式 $A_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 和 $A_0^N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 和双线性形式 $B(q,\boldsymbol{v})$ 有下面引理成立 (Bao and Han, 2003)：

引理 2.3.1 下面不等式成立：

$$0\leqslant A_0^N(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\leqslant A_0(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\leqslant 3A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\equiv 3\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*^2,\quad\forall v\in\mathbb{V}_0,\tag{2.3.61}$$

$$|A_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant 3\parallel\boldsymbol{u}\parallel_*\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0,\tag{2.3.62}$$

$$|A_0^N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant 3\parallel\boldsymbol{u}\parallel_*\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*,\quad\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0.\tag{2.3.63}$$

■

引理 2.3.2

(i)

$$|B(q,\boldsymbol{v})|\leqslant\sqrt{2}\parallel q\parallel_W\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*,\quad\forall q\in W,\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0,\tag{2.3.64}$$

(ii) 存在一个不依赖于 R 的常数 $\beta_0>0$，使

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0\setminus\{0\}}\frac{B(q,\boldsymbol{v})}{\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*}\geqslant\beta_0\parallel q\parallel_W,\quad\forall q\in W.\tag{2.3.65}$$

■

假设 $\boldsymbol{f}(x)=\left(f_1(x),f_2(x)\right)^{\mathrm{T}}\in H^{-1}(\Omega_i)\times H^{-1}(\Omega_i)$，应用混合变分问题的存在唯一性定理 (Girault and Raviart, 1981) 可知变分问题 (2.3.50)~(2.3.51) 存在唯一解 $(\boldsymbol{u},p)\in\mathbb{V}_0\times W$, 并且变分问题 (2.3.52)~(2.3.53) 存在唯一解 $(\boldsymbol{u}^N,p^N)\in\mathbb{V}_0\times W$。

对于误差 $A_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-A_0^N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 有下面的估计式成立：

引理 2.3.3 假设 $(\boldsymbol{u},p)\in\mathbb{V}_0\times W$ 是 Stokes 外问题 (2.3.1)~(2.3.5) 的解并且 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_0}\in\left(H^{3/2}(\Gamma_0)\right)^2$，则下面的估计式成立：

$$|A_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-A_0^N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant C_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}}|u|_{3/2,\Gamma_0}\parallel v\parallel_*,\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0.\tag{2.3.66}$$

证明 将 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$ 的分量 $u_i(i=1,2)$ 在 Γ_0 上展开为傅氏级数：

$$u_i(R_0,\theta)=\frac{p_0^i}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n^i\cos n\theta+q_n^i\sin n\theta),\quad i=1,2. \tag{2.3.67}$$

对于任意 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0$，将 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)^{\mathrm{T}}$ 的分量 v_i 在 Γ_R 上展开为傅氏级数：

$$v_i(R,\theta)=\frac{c_0^i}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n^i\cos n\theta+d_n^i\sin n\theta),\quad i=1,2. \tag{2.3.68}$$

由于 $(\boldsymbol{u},p)$ 在区域 $|x|\geqslant R_0$ 上满足齐次 Stokes 方程组，类似于在 2.3.1 节中的讨论在区域 $|x|\geqslant R_0$ 上 $\boldsymbol{u}$ 可表示为下面级数形式：

$$\begin{aligned}u_1(r,\theta)=&\frac{r^2-R_0^2}{2}\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)\big\{(p_{n-2}^1-q_{n-2}^2)\cos n\theta\\&+(q_{n-2}^1-p_{n-2}^2)\sin n\theta\big\}\frac{R_0^{n-2}}{r^n}\\&+\frac{p_0^1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n^1\cos n\theta+q_n^1\sin n\theta)\frac{R_0^n}{r^n},\quad r\geqslant R_0,\end{aligned} \tag{2.3.69}$$

$$\begin{aligned}u_2(r,\theta)=&\frac{r^2-R_0^2}{2}\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)\big\{-(q_{n-2}^1+p_{n-2}^2)\cos n\theta\\&+(p_{n-2}^1-q_{n-2}^2)\sin n\theta\big\}\frac{R_0^{n-2}}{r^n}\\&+\frac{p_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n^2\cos n\theta+q_n^2\sin n\theta)\frac{R_0^n}{r^n},\quad r\geqslant R_0.\end{aligned} \tag{2.3.70}$$

在 (2.3.69) 和 (2.3.70) 中令 $r=R$，我们得到：

$$u_i(R,\theta)=\frac{a_0^i}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^i\cos n\theta+b_n^i\sin n\theta),\quad i=1,2, \tag{2.3.71}$$

其中

$$a_n^1=\left(\frac{R_0}{R}\right)^n\begin{cases}p_n^1, & n=0,1,2,\\ p_n^1+\dfrac{(n-2)(R^2-R_0^2)}{2R_0^2}(p_{n-2}^1-q_{n-2}^2), & n\geqslant 3,\end{cases} \tag{2.3.72}$$

$$b_n^1=\left(\frac{R_0}{R}\right)^n\begin{cases}q_n^1, & n=1,2\\ q_n^1+\dfrac{(n-2)(R^2-R_0^2)}{2R_0^2}(q_{n-2}^1-p_{n-2}^2), & n\geqslant 3,\end{cases} \tag{2.3.73}$$

$$a_n^2=\left(\frac{R_0}{R}\right)^n\begin{cases}p_n^2, & n=0,1,2\\ p_n^2+\dfrac{(n-2)(R^2-R_0^2)}{2R_0^2}(q_{n-2}^1-p_{n-2}^2), & n\geqslant 3,\end{cases} \tag{2.3.74}$$

$$b_n^2 = \left(\frac{R_0}{R}\right)^n \begin{cases} q_n^2, & n = 1, 2 \\ q_n^2 + \dfrac{(n-2)(R^2 - R_0^2)}{2R_0^2}(p_{n-2}^1 - q_{n-2}^2), & n \geqslant 3, \end{cases} \tag{2.3.75}$$

将 (2.3.71), (2.3.68) 代入 $A_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - A_0^N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 可得：

$$\begin{aligned} |A_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - A_0^N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| &= 2\mu\pi \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} n(a_n^i c_n^i + b_n^i d_n^i) \right| \\ &\leqslant 2\mu\pi \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} n \sum_{i=1}^{2} \left((a_n^i)^2 + (b_n^i)^2\right) \right\}^{1/2} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} n \sum_{i=1}^{2} \left((c_n^i)^2 + (d_n^i)^2\right) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

由引理 2.3.1 可知：

$$\sqrt{2\mu\pi} \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} n \sum_{i=1}^{2} \left((c_n^i)^2 + (d_n^i)^2\right) \right\}^{1/2} \leqslant \sqrt{A_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})} \leqslant \sqrt{3} \parallel \boldsymbol{v} \parallel_*, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0. \tag{2.3.76}$$

进一步应用等式 (2.3.71)~(2.3.75) 可得：

$$\begin{aligned} &\sqrt{2\mu\pi} \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} n \sum_{i=1}^{2} \left((a_n^i)^2 + (b_n^i)^2\right) \right\}^{1/2} \\ \leqslant{}& C_0 \left\{ \sum_{n=N+1}^{\infty} n \frac{R_0^{2n}}{R^{2n}} \sum_{i=1}^{2} \left((p_n^i)^2 + (q_n^i)^2\right) \right. \\ &\left. + \sum_{n=N-1}^{\infty} n^3 \frac{R_0^{2n}}{R^{2n}} \sum_{i=1}^{2} \left((p_n^i)^2 + (q_n^i)^2\right) \right\}^{1/2} \\ \leqslant{}& C_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1, N-1\}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sum_{i=1}^{2} (p_n^i)^2 + (q_n^i)^2) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.3.77}$$

其中 C_0 是一个不依赖于 R 的常数，在不同的位置上可取不同的值。综合上述估计式，我们得到估计式 (2.3.66)。 ■

设 $\mathbb{V}_0^h, W^h$ 分别是 $\mathbb{V}_0$ 和 W 的有限元子空间，并且 $\mathbb{V}_0^h$ 和 W^h 满足下面离散的确界条件，即存在一个不依赖于 h 的正常数 β^*，使

$$\sup_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h / \{0\}} \frac{B(q_h, \boldsymbol{v}_h)}{\parallel \boldsymbol{v}_h \parallel_*} \geqslant \beta^* \parallel q_h \parallel_W, \quad \forall q_h \in W^h. \tag{2.3.78}$$

考虑变分问题 (2.3.52)~(2.3.53) 的有限元近似：

$$\begin{cases} 找(\boldsymbol{u}_h^N, p_h^N) \in \mathbb{V}_0^h \times W^h,\ 使 \\ A(\boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}) + A_0^N(\boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}) + B(p_h^N, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega_i} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}x, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0^h, & (2.3.79) \\ B(q_h, \boldsymbol{u}_h^N) = 0, \quad \forall q_h \in W^h. & (2.3.80) \end{cases}$$

在条件 (2.3.78) 下，离散变分问题 (2.3.79)~(2.3.80) 存在唯一解 $(\boldsymbol{u}_h^N, p_h^N)$，并且下面的误差估计式成立：

定理 2.3.1　假设 $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbb{V}_0 \times W$ 是 Stokes 方程组外问题 (2.3.1)~(2.3.5) 的解，并且 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_0} \in (H^{3/2}(\Gamma_0))^2$. $(\boldsymbol{u}_h^N, p_h^N) \in \mathbb{V}_0^h \times W^h$ 是有限元近似问题 (3.3.79)~(2.3.80) 的解，则下面的误差估计式成立：

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N \|_* + \| p - {p_h}^N \|_W \leqslant C_0 \Big\{ & \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h^N \|_* \\ & + \inf_{q_h \in W_h} \| p - q_h \|_W + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1, N-1\}} |\boldsymbol{u}|_{3/2, \Gamma_0} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.3.81}$$

其中 C_0 是一个常数，不依赖于 R, h 和 N。

证明　由变分等式 (2.3.50)~(2.3.51) 和变分等式 (2.3.79)~(2.3.80)，可知误差 $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N, p - p_h^N)$ 满足：

$$\begin{aligned} & A(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}) + A_0^N(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}) + B(p - {p_h}^N, \boldsymbol{v}) \\ & = A_0^N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - A_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \forall v \in \mathbb{V}_0^h, \end{aligned} \tag{2.3.82}$$

$$B(q, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N) = 0, \quad \forall q \in W^h. \tag{2.3.83}$$

令：

$$Z_h = \{\boldsymbol{v} \mid \ \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0^h;\ 并且\ B(q_h, \boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall q_h \in W^h\}. \tag{2.3.84}$$

$\forall \boldsymbol{v}_h \in Z_h$，则 $\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N \in Z_h$，并且，

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N \|_*^2 & \leqslant A(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) + A_0^N(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) \\ & = A(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) + A_0^N(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) \\ & \quad + A(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) + A_0^N(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) \\ & = -B(p - p_h^N, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) + A_0^N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) \\ & \quad - A_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) + A(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) + A_0^N(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N). \end{aligned}$$

由于 $(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N) \in Z_h$，我们有：

$$\begin{aligned} |B(p - p_h^N, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N)| & = |B(p - q_h, \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N)| \\ & \leqslant \sqrt{2} \| p - q_h \|_W \| \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{u}_h^N \|_*, \quad \forall q_h \in W^h. \end{aligned}$$

应用不等式 (2.3.61) 和 (2.3.62) 可得：

$$
\begin{aligned}
&|A(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N)|\leqslant\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}\|_*\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N\|_*,\quad\forall\boldsymbol{v}_h\in Z_h,\\
&|A_0^N(\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N)|\leqslant 3\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}\|_*\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N\|_*,\forall\boldsymbol{v}_h\in Z_h.
\end{aligned}
$$

由引理 2.3.3 可得：

$$
\begin{aligned}
&|A_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N)-A_0^N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N)|\\
&\leqslant C_0\left\{\frac{1}{\max(1,N-1)^{k-1}}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}}|\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0}\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N\|_*\right\}.
\end{aligned}
$$

综合上述分析我们得到：

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h^N\|_*\leqslant&4\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h\|_*+\sqrt{2}\|p-q_h\|_W\\
&+C_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}}|\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0},\quad\forall q_h\in W_h,\boldsymbol{v}_h\in Z_h.
\end{aligned}
$$

由三角不等式有：

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^N\|_*\leqslant C_0\Big\{&\inf_{\boldsymbol{v}_h\in Z_h}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h^N\|_*+\inf_{q_h\in W_h}\|p-q_h\|_W\\
&+\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}}|\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0}\Big\}.
\end{aligned}\tag{2.3.85}
$$

进一步由离散的确界条件 (2.3.78)，$\forall q_h\in W^h$ 可得到：

$$
\begin{aligned}
\|q_h-p_h^N\|_W\leqslant&\frac{1}{\beta_0^*}\sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_0^h-\{0\}}\frac{B(q_h-p_h^N,\boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_*}\\
=&\frac{1}{\beta_0^*}\sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_0^h-\{0\}}\left\{\frac{|B(p-q_h,\boldsymbol{v}_h)|}{\|\boldsymbol{v}_h\|_*}+\frac{|B(p-p_h^N,\boldsymbol{v}_h)|}{\|\boldsymbol{v}_h\|_*}\right\}\\
\leqslant&\frac{1}{\beta_0^*}\{\sqrt{2}\|p-q_h\|_W\\
&+\sup_{\boldsymbol{v}_h\in V_0^h-\{0\}}\\
&\cdot\left\{|\frac{A(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^N,\boldsymbol{v}_h)+A_0^N(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^N,\boldsymbol{v}_h)+A_0(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^N,\boldsymbol{v}_h)-A_0^N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_*}\right\}\\
\leqslant&\frac{1}{\beta_0^*}\Big\{\sqrt{2}\|p-q_h\|_W+4\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^N\|_*\\
&+C_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}}|\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0}\Big\},\ \forall q_h\in W_h.
\end{aligned}
$$

将估计式 (2.3.85) 代入上式并应用三角不等式可得：

$$\| p_h - p_h^N \|_W \leqslant \frac{C_0}{\beta^*}\left\{ \inf_{v_h \in Z_h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h^N \|_* + \inf_{q_h \in W_h} \| p - q_h \|_W \right.$$
$$\left. + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{1,N-1\}} |\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0} \right\}. \tag{2.3.86}$$

应用 Brenner and Scott (1994) 书中的定理 10.5.17 (P.251) 可知：

$$\inf_{\boldsymbol{v}_h \in Z_h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|_* \leqslant \left(1 + \frac{C_1}{\beta_0^*}\right) \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|_*, \tag{2.3.87}$$

其中 C_1 是一个不依赖于 R, h 和 N 的常数。将上式代入 (2.3.85) 和 (2.3.86)，定理获证。 ■

假设 Γ 是一个多角形的边界，像在 2.2.3 节中对有界区域 Ω_i 进行三角剖分得到剖分 J_h。J_h 满足条件 (2.2.75)。我们知道 Taylor-Hood 单元 (即 p_2/p_1 单元) 满足离散的确界条件 (2.3.78) (Brenner and Scott, 1994; Girault and Raviat, 1981)。对由 Taylor-Hood 单元得到的有限元子空间 $\mathbb{V}_0^h$ 和 W^h，有下面的插值误差估计。

$$\inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|_* + \inf_{q_h \in W^h} \| p - q_h \|_W \leqslant C_0 h^2 (|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega_i} + |p|_1). \tag{2.3.88}$$

综合定理 2.3.1 和估计式 (2.3.88)，我们得到下面有限元近似解的误差估计：

定理 2.3.2　设 $(\boldsymbol{u}, p) \in \mathbb{V}_0 \times W$ 是 Stokes 方程组外问题 (2.3.1)~(2.3.2) 的解，并且 $\boldsymbol{u} \in \left(H^2(\Omega_i)\right)^2, p \in H^1(\Omega_i), (\boldsymbol{u}_h^N, p_h^N) \in \mathbb{V}_0^h \times W^h$ 是有限元近似问题 (2.3.79)~(2.3.80) 的解，其中有限元子空间 $\mathbb{V}_0^h \times W^h$ 是由 Taylor-Hood 单元得到的，则下面的误差估计式成立：

$$\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N \|_* + \| p - p_h^N \|_W \leqslant C_0 \left\{ h^2 \left(|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega_i} + |p|_{1,\Omega_i}\right) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(1,N-1)} |\boldsymbol{u}|_{3/2,\Gamma_0} \right\}. \tag{2.3.89}$$

■

本节的主要内容来源于论文 Han and Wu (1985-B), Han and Bao (1997), Bao and Han (2003)。

2.4　球面上的向量场

为了研究三维 Navier 方程组外问题的整体人工边界条件，我们在这一节做些准备工作。设 $\Gamma_1 = \{x, | \ |x| = 1\}$，即 Γ_1 表示单位球面。对于任意点 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$，其三个分量 (x_1, x_2, x_3) 可由极坐标表示：

$$x_1 = r \sin\theta \cos\phi,$$

$$x_2 = r\sin\theta\sin\phi,$$

$$x_3 = r\cos\theta,$$

其中，$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$。令：

$$Y_n^m(\theta,\phi) = (-1)^m\Big(\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}\Big)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}P_n^m(\cos\theta),$$

$$n \geqslant 0, \quad -n < m \leqslant n, \tag{2.4.1}$$

其中 $P_n^m(t)$ 是 Legendre 函数。$\{Y_n^m(\theta,\phi), \quad m = 0,\pm1,\cdots,\pm n\}$ 是 $2n+1$ 个 n 阶球调和函数，函数族 $\{Y_n^m(\theta,\phi), \quad m = 0,\pm1,\cdots,\pm n, \quad n \geqslant 0\}$ 是线性空间 $L^2(\varGamma_1)$ 的一组完备标准正交基 (Nedelec, 2001, P. 41)。对于任意函数 $f(\theta,\phi) \in L^2(\varGamma_1)$, 有下面的级数展开式成立：

$$f(\theta,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_n^m Y_n^m(\theta,\phi), \tag{2.4.2}$$

其中，

$$f_n^m = \int_{\varGamma_1} f(\theta,\phi)\overline{Y_n^m}(\theta,\phi)\mathrm{d}s. \tag{2.4.3}$$

记：

$$H_n^m(x) = r^n Y_n^m(\theta,\phi), \tag{2.4.4}$$

则 $\{H_n^m(x), \quad m = 0,\pm1,\cdots,\pm n\}$ 是 $2n+1$ 个 n 阶齐次调和多项式.

下面通过函数 $\{H_n^m(x), n \geqslant 0, -n < m \leqslant n\}$ 给出单位球面 $\varGamma_1$ 上的向量场 $\big(L^2(\varGamma_1)\big)^3$ 的一组完备正交基 (Nedelec, 2001, P.35)。令：

$$\boldsymbol{I}_n^m(x) = \nabla H_{n+1}^m(x), \quad n \geqslant 0, \quad -(n+1) \leqslant m \leqslant (n+1), \tag{2.4.5}$$

$$\boldsymbol{T}_n^m(x) = \nabla H_n^m(x) \wedge x, \quad n \geqslant 1, \quad -n \leqslant m \leqslant n, \tag{2.4.6}$$

$$\boldsymbol{N}_n^m(x) = (2n-1)H_{n-1}^m(x)x - |x|^2\nabla H_{n-1}^m(x),$$

$$n \geqslant 1, \quad -(n-1) \leqslant m \leqslant (n-1), \tag{2.4.7}$$

则 $\boldsymbol{I}_n^m(x), \quad \boldsymbol{T}_n^m(x), \quad \boldsymbol{N}_n^m(x)$ 是定义于 $\mathbb{R}^3$ 上的 n 阶齐次向量值调和多项式 (即其分量是 n 阶齐次调和多项式)。考虑向量值函数 $\boldsymbol{I}_n^m(x), \quad \boldsymbol{T}_n^m(x), \boldsymbol{N}_n^m(x)$ 在单位球面 $\varGamma_1$ 上的迹，记

$$\mathbb{I}_n^m = \boldsymbol{I}_n^m\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{I}_n^m(x)}{r^n}, \tag{2.4.8}$$

$$\mathbb{T}_n^m = \boldsymbol{T}_n^m\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{T}_n^m(x)}{r^n}, \tag{2.4.9}$$

$$\mathbb{N}_n^m = \boldsymbol{N}_n^m\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\boldsymbol{N}_n^m(x)}{r^n}. \tag{2.4.10}$$

称 $\mathbb{I}_n^m(n \geqslant 0, -(n+1) \leqslant m \leqslant n+1)$, $\mathbb{T}_n^m(n \geqslant 1, -n \leqslant m \leqslant n)$, $\mathbb{N}_n^m(n \geqslant 1, -(n-1) \leqslant m \leqslant n-1)$ 为球调和向量值函数，有下面的结果成立：

引理 2.4.1(Nedelec, 2001)　向量组 $\{\mathbb{I}_n^m(n \geqslant 0, -(n+1) \leqslant m \leqslant n+1), \mathbb{T}_n^m(n \geqslant 1, -n \leqslant m \leqslant n), \mathbb{N}_n^m(n \geqslant 1, -(n-1) \leqslant m \leqslant n-1)\}$ 构成空间 $\left(L^2(\Gamma_1)\right)^3$ 的一组完备正交基，并且，

$$\int_{\Gamma_1} |\mathbb{I}_n^m|^2 \mathrm{d}s = (n+1)(2n+3), \quad n \geqslant 0, \tag{2.4.11}$$

$$\int_{\Gamma_1} |\mathbb{T}_n^m|^2 \mathrm{d}s = n(n+1), \quad n \geqslant 1, \tag{2.4.12}$$

$$\int_{\Gamma_1} |\mathbb{N}_n^m|^2 \mathrm{d}s = n(2n-1), \quad n \geqslant 1. \tag{2.4.13}$$

记：

$$K_n^m(x) = \frac{1}{r^{2n+1}} H_n^m(x), \quad n \geqslant 0, \quad -n \leqslant m \leqslant n,$$

则除原点外 $K_n^m(x)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上调和，并且，

$$\lim_{r\to\infty} K_n^m(x) = 0. \tag{2.4.14}$$

■

令：

$$\boldsymbol{n} = \frac{x}{r},$$

$\boldsymbol{n}$ 表示单位球面 Γ_1 上的单位外法线向量，则下面的引理成立 (Zheng and Han, 2003)：

引理 2.4.2

$$\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{I}_n^m}{r^{n+1}}\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{r^{n+3}} \mathbb{N}_{n+2}^m, \tag{2.4.15}$$

$$\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{T}_n^m}{r^{n+1}}\right) = 0, \tag{2.4.16}$$

$$\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{N}_n^m}{r^{n+1}}\right) = 0, \tag{2.4.17}$$

$$\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{I}_n^m}{r^{n+1}}\right)\boldsymbol{n} = -\frac{1}{r^{n+2}}\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}\mathbb{I}_n^m + \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}\mathbb{N}_{n+2}^m\right\}, \tag{2.4.18}$$

$$\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{T}_n^m}{r^{n+1}}\right)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \tag{2.4.19}$$

$$\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{N}_n^m}{r^{n+1}}\right)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \tag{2.4.20}$$

$$\nabla \otimes \frac{\mathbb{I}_n^m}{r^{n+1}} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{1}{r^{n+2}}\left\{\frac{1}{2n+3}\mathbb{I}_n^m + \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}\mathbb{N}_{n+2}^m\right\}, \quad (2.4.21)$$

$$\nabla \otimes \frac{\mathbb{T}_n^m}{r^{n+1}} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{1}{r^{n+2}}T_n^m, \quad (2.4.22)$$

$$\nabla \otimes \frac{\mathbb{N}_n^m}{r^{n+1}} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{n+1}{r^{n+2}}N_n^m. \quad (2.4.23)$$

其中 $\otimes$ 表示张量乘积。

证明 (Zheng and Han, 2003) 由 $\boldsymbol{I}_n^m(x), \boldsymbol{T}_n^m(x), \boldsymbol{N}_n^m(x)$ 的定义可知，它们是 n 阶齐次向量值调和多项式，直接验证可得：

$$x \cdot \boldsymbol{I}_n^m(x) = (n+1)H_{n+1}^m(x),$$

$$x \cdot \boldsymbol{T}_n^m(x) = 0,$$

$$x \cdot \boldsymbol{N}_n^m(x) = nr^2 H_{n-1}^m(x),$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{I}_n^m(x) = 0,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T}_n^m(x) = 0,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{N}_n^m(x) = n(2n+1)H_{n-1}^m(x),$$

并且，

$$H_n^m(x)x = \frac{r^2}{2n+1}\boldsymbol{I}_n^m(x) + \frac{1}{2n+1}\boldsymbol{N}_n^m(x).$$

应用上述等式，直接计算可得：

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{\mathbb{I}_n^m}{r^{n+1}} &= \nabla \cdot \frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}} = -(2n+1)\frac{1}{r^{2n+3}}x \cdot \mathbb{I}_n^m(x) + \frac{1}{r^{2n+1}}\nabla \cdot \mathbb{I}_n^m(x) \\
&= -\frac{(n+1)(2n+1)}{r^{2n+3}}H_{n+1}^m(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{\mathbb{T}_n^m}{r^{n+1}} &= \nabla \cdot \frac{\mathbb{T}_n^m(x)}{r^{2n+1}} = -(2n+1)\frac{1}{r^{2n+3}}x \cdot \mathbb{T}_n^m(x) \\
&\quad + \frac{1}{r^{2n+1}}\nabla \cdot T_n^m(x) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{\mathbb{N}_n^m}{r^{n+1}} &= \nabla \cdot \frac{\mathbb{N}_n^m(x)}{r^{2n+1}} = -(2n+1)\frac{1}{r^{2n+3}}x \cdot \mathbb{N}_n^m(x) \\
&\quad + \frac{1}{r^{2n+1}}\nabla \cdot \mathbb{N}_n^m(x) = 0.
\end{aligned}$$

由此可得等式 (2.4.16)~(2.4.20)。进一步有下面的等式成立：

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{I}_n^m}{r^{n+1}}\right) &= \nabla\left(\nabla \cdot \frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}}\right) \\
&= -(n+1)(2n+1)\left\{\frac{1}{r^{2n+3}}\nabla H_{n+1}^m(x)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(2n+3)\frac{1}{r^{2n+5}}H_{n+1}^m(x)x\Big\} \\
&=\frac{(n+1)(2n+1)}{r^{2n+5}}\Big\{(2n+3)H_{n+1}^m(x)x - r^2\nabla H_{n+1}^m(x)\Big\} \\
&=\frac{(n+1)(2n+1)}{r^{2n+5}}\mathbb{N}_n^m(x)=\frac{(n+1)(2n+1)}{r^{2n+3}}\mathbb{N}_{n+2}^m,
\end{aligned}
$$

等式 (2.4.15) 获证。通过计算可得:

$$
\begin{aligned}
\Big(\nabla\otimes\frac{\mathbb{I}_n^m}{r^{n+1}}\Big)\cdot x &= \Big(\nabla\otimes\frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}}\Big)\cdot x = \nabla\Big(\frac{x\cdot\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}}\Big)-\frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}} \\
&=(n+1)\nabla\Big(\frac{H_{n+1}^m(x)}{r^{2n+1}}\Big)-\frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}} \\
&=(n+1)\Big\{-(2n+1)\frac{1}{r^{2n+3}}H_{n+1}^m(x)x+\frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}}\Big\}-\frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}} \\
&=(n+1)\Big\{\frac{2}{2n+3}\frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}}-\frac{2n+1}{2n+3}\frac{1}{r^{2n+3}}\boldsymbol{N}_{n+2}^m(x)\Big\}-\frac{\mathbb{I}_n^m(x)}{r^{2n+1}} \\
&=-\frac{1}{r^{n+1}}\Big\{\frac{1}{2n+3}\mathbb{I}_n^m+\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}\mathbb{N}_{n+2}^m\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\Big(\nabla\otimes\frac{\mathbb{T}_n^m}{r^{n+1}}\Big)\cdot x = \nabla\Big(\frac{x\cdot\mathbb{T}_n^m(x)}{r^{2n+1}}\Big)-\frac{\mathbb{T}_n^m(x)}{r^{2n+1}} = -\frac{\mathbb{T}_n^m}{r^{n+1}},
$$

$$
\begin{aligned}
\Big(\nabla\otimes\frac{\mathbb{N}_n^m}{r^{n+1}}\Big)\cdot x &= \nabla\Big(\frac{x\cdot\mathbb{N}_n^m(x)}{r^{2n+1}}\Big)-\frac{\mathbb{N}_n^m(x)}{r^{2n+1}} \\
&=n\Big\{-(2n-1)\frac{1}{r^{2n+1}}H_{n-1}^m(x)x+\frac{1}{r^{2n-1}}\nabla H_{n-1}^m(x)\Big\}-\frac{\mathbb{N}_n^m(x)}{r^{2n+1}} \\
&=-\frac{n+1}{r^{n+1}}\mathbb{N}_n^m.
\end{aligned}
$$

引理获证。 ■

2.5　三维 Navier 方程组外问题的整体人工边界条件

考虑三维 Navier 方程组的外问题 (III) (其中 $g(x)\equiv 0$):

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}-(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}(x),\quad \forall x\in\Omega, \tag{2.5.1}$$

$$\boldsymbol{u}|_\Gamma=\boldsymbol{0}, \tag{2.5.2}$$

$$\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{0},\quad 当\ |x|\to\infty, \tag{2.5.3}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$。引进人工边界 $\Gamma_R=\big\{x\mid |x|=R,\quad R>R_0\big\}$, Γ_R 是半径为 R 的球面，它将区域 Ω 分割为有界计算区域 $\Omega_i=\big\{x\mid x\in\Omega, 并且|x|<R\big\}$ 和余下

的无界部分 $\Omega_e = \{x \mid |x| > R\}$。首先在人工边界 Γ_R 上找出问题 (2.5.1)~(2.5.3) 的解 $\boldsymbol{u}$ 满足的准确人工边界条件和一系列高精度的近似人工边界条件。

2.5.1 高精度的近似整体人工边界条件

考虑问题 (2.5.1)~(2.5.3) 的解 $\boldsymbol{u}$ 在区域 Ω_e 上的限制，$\boldsymbol{u}$ 满足：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{2.5.4}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{u}(R,\theta,\phi), \tag{2.5.5}$$

$$\boldsymbol{u} \to \boldsymbol{0}, \text{当 } |x| \to \infty. \tag{2.5.6}$$

如果位移 $\boldsymbol{u}$ 在人工边界 Γ_R 上的值 $\boldsymbol{u}(R,\theta,\phi)$ 是已知的，则问题 (2.5.4)~(2.5.6) 存在唯一解。通过下面的分析可给出问题 (2.5.4)~(2.5.6) 的解 $\boldsymbol{u}$ 的表示式。应用 Kelvin 的想法 (Sokolnikoff, 1983, P. 351)，首先将 $\boldsymbol{u}$ 展开为下面的级数：

$$\boldsymbol{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_n, \tag{2.5.7}$$

对 $n \geqslant 0$, $\boldsymbol{u}_n$ 满足齐次 Navier 方程组 (2.5.4) 并且有下面的形式：

$$\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{G}_n + c_n(r^2 - R^2)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n), \tag{2.5.8}$$

其中 $\boldsymbol{G}_n$ 是一个向量值调和函数，并且 $r^{2n+1}\boldsymbol{G}_n$ 是一个 n 阶齐次向量值调和多项式，c_n 是一个待定常数。由式 (2.5.8) 可得：

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{u}_n &= \nabla\cdot\boldsymbol{G}_n + c_n\{2x\cdot\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n) + (r^2-R^2)\Delta(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n)\} \\
&= \nabla\cdot\boldsymbol{G}_n + 2c_n\{-(n+2)\}\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n \\
&= \{1 - c_n(2n+4)\}\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n,
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{u}_n &= \Delta\boldsymbol{G}_n + c_n\{\Delta(r^2-R^2)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n) \\
&\quad + 2\nabla(r^2-R^2)\cdot\nabla\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n) + (r^2-R^2)\Delta\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n)\} \\
&= c_n\{6\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n) + 4x\cdot\nabla\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n)\} \\
&= c_n\{6\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n) - 4(n+3)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n)\} \\
&= -(4n+6)c_n\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n).
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

将式 (2.5.9)~(2.5.10) 代入方程 (2.5.4) 可得：

$$\begin{aligned}
&-\mu\Delta\boldsymbol{u}_n - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_n) \\
&= \{(4n+6)c_n\mu - [1-(2n+4)c_n](\lambda+\mu)\}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{G}_n) \\
&= \boldsymbol{0},
\end{aligned}$$

由此得到：

$$c_n = \frac{\lambda+\mu}{(2n+4)\lambda+(6n+10)\mu}. \tag{2.5.11}$$

公式 (2.5.8), (2.5.11) 给出的 $\boldsymbol{u}_n$ 满足齐次 Navier 方程组 (2.5.4)。在人工边界 Γ_R 上，将 $\boldsymbol{u}(R,\theta,\phi)$ 展开为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(R,\theta,\phi) = &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} A_n^m \mathbb{I}_n^m + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_n^m \mathbb{T}_n^m \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} C_n^m \mathbb{N}_n^m,\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

其中，

$$\begin{aligned}A_n^m &= \frac{1}{(n+1)(2n+3)}\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{u}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{I}_n^m}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{(n+1)(2n+3)R^2}\int_{\Gamma_R} \boldsymbol{u}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{I}_n^m}\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

$$B_n^m = \frac{1}{n(n+1)R^2}\int_{\Gamma_R} \boldsymbol{u}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{T}_n^m}\mathrm{d}s, \tag{2.5.14}$$

$$C_n^m = \frac{1}{n(2n-1)R^2}\int_{\Gamma_R} \boldsymbol{u}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{N}_n^m}\mathrm{d}s. \tag{2.5.15}$$

称 $\{A_n^m(n\geqslant 0, -(n+1)\leqslant m\leqslant (n+1)),\ B_n^m(n\geqslant 1, -n\leqslant m\leqslant n),\ C_n^m(n\geqslant 1, -(n-1)\leqslant m\leqslant (n-1))\}$ 为 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}$ 的傅氏系数。令：

$$\boldsymbol{G}_n = \begin{cases} \left(\dfrac{R}{r}\right)^{n+1} \displaystyle\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} A_n^m\mathbb{I}_n^m, & n=0, \\ \left(\dfrac{R}{r}\right)^{n+1} \left\{\displaystyle\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} A_n^m\mathbb{I}_n^m + \sum_{m=-n}^{n} B_n^m\mathbb{T}_n^m \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} C_n^m\mathbb{N}_n^m \right\}, & n>0. \end{cases} \tag{2.5.16}$$

则公式 (2.5.7)∼(2.5.8), (2.5.16) 给出了 Navier 方程组外问题 (2.5.4)∼(2.5.6) 的解 $\boldsymbol{u}$ (其中 $\boldsymbol{u}(R,\theta,\phi)$ 作为已知函数)。下面进一步计算由位移向量 $\boldsymbol{u}$ 在人工边界 Γ_R 上产生的法向应力。由胡克定律 (2.1.2)，我们有：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \tag{2.5.17}$$

其中 $\mathbb{I}$ 为二阶度量张量，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ 为应变张量，应用张量乘积记号应变张量可被重写为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \boldsymbol{u} + (\nabla \otimes \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\right). \tag{2.5.18}$$

在人工边界 Γ_R 上，

$$\begin{aligned}
\nabla \otimes \boldsymbol{u}_n &= \nabla \otimes \boldsymbol{G}_n + c_n\{\nabla(r^2 - R^2) \otimes \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n) \\
&\quad + (r^2 - R^2)\nabla \otimes \left(\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n)\right)\} \\
&= \nabla \otimes \boldsymbol{G}_n + 2c_n x \otimes \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n), \\
2\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n) &= \nabla \otimes \boldsymbol{G}_n + (\nabla \otimes \boldsymbol{G}_n)^{\mathrm{T}} + 2c_n\left(x \otimes \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n)\right) + \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n\right) \otimes x).
\end{aligned}$$

由 Γ_R 上法向应力的定义可得：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_n|_{\Gamma_R}) \cdot \boldsymbol{n} &= \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{n} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_n) \cdot \boldsymbol{n} \\
&= \lambda\{1 - (2n+4)c_n\}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{n} - \frac{(n+1)\mu}{R}\boldsymbol{G}_n \\
&\quad + \mu\nabla \otimes \boldsymbol{G}_n \cdot \boldsymbol{n} + 2c_n\mu R\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n) \\
&\quad - c_n(2n+4)\mu(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{n} \\
&= \frac{(2n+2)\lambda\mu - (2n+4)\mu^2}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda}(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n)\boldsymbol{n} - \frac{(n+1)\mu}{R}\boldsymbol{G}_n \\
&\quad + \frac{2\lambda\mu + 2\mu^2}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda}R\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n) + \mu\nabla \otimes \boldsymbol{G}_n \cdot \boldsymbol{n},
\end{aligned}$$

上式计算中用到了等式 (2.5.9) 和 $\boldsymbol{G}_n$ 是齐次函数的性质。进一步应用引理 2.4.2 中的等式，可得：

1. 若 $\boldsymbol{G}_n = \dfrac{\mathbb{I}_n^m}{r^{n+1}}$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_n|_{\Gamma_R}) \cdot \boldsymbol{n} &= \frac{(2n+2)\lambda\mu - (2n+4)\mu^2}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda}\left\{-\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}\frac{\mathbb{I}_n^m}{R^{n+2}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}\frac{\mathbb{N}_{n+2}^m}{R^{n+2}}\right\} \\
&\quad - \frac{(n+1)\mu}{R^{n+2}}\mathbb{I}_n^m + \frac{2\lambda\mu + 2\mu^2}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda} \\
&\quad \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{R^{n+2}}\mathbb{N}_{n+2}^m \\
&\quad + \frac{\mu}{R^{n+2}}\left\{-\frac{1}{2n+3}\mathbb{I}_n^m - \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}\mathbb{N}_{n+2}^m\right\}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{R^{n+2}} \frac{(4n^2+12n+12)\mu + (4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda} \mu \mathbb{I}_n^m.$$

2. 如果 $\boldsymbol{G}_n = \dfrac{\mathbb{T}_n^m}{r^{n+1}}$，则可得：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_n|_{\Gamma_R}) \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{n+2}{R^{n+2}} \mu \mathbb{T}_n^m.$$

3. 如果 $\boldsymbol{G}_n = \dfrac{\mathbb{N}_n^m}{r^{n+1}}$，则可得：

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_n|_{\Gamma_R}) \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{2n+2}{R^{n+2}} \mu \mathbb{N}_n^m.$$

对于由公式 (2.5.7)~(2.5.8)，(2.5.16) 给出的齐次 Navier 方程组的解 $\boldsymbol{u}$ 有：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) \cdot \boldsymbol{n} = & -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} \frac{(4n^2+12n+12)\mu + (4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda} \mu A_n^m \mathbb{I}_n^m \\
& -\frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (n+2)\mu B_n^m \mathbb{T}_n^m \\
& -\frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} (2n+2)\mu C_n^m \mathbb{N}_n^m \\
\equiv & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}),
\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

其中 $\{A_n^m(n \geqslant 0, -(n+1) \leqslant m \leqslant (n+1)),\quad B_n^m(n \geqslant 1, -n \leqslant m \leqslant n),\quad C_n^m(n \geqslant 1, -(n-1) \leqslant m \leqslant (n-1))\}$ 由式 (2.5.13)~(2.5.15) 给出。等式 (2.5.19) 给出了由 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}$ 到 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_n|_{\Gamma_R})$ 的映射。它就是三维 Navier 方程组外问题 (2.5.1)~(2.5.3) 的解 $\boldsymbol{u}$ 在人工边界 Γ_R 上满足的准确人工边界条件，如果在等式 (2.5.19) 中的无穷级数中仅取有限项，则可得到一系列高精度的近似整体人工边界条件。即：

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{T}^N(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}) \\
= & -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} \frac{(4n^2+12n+12)\mu + (4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda} \mu A_n^m \mathbb{I}_n^m \\
& -\frac{1}{R} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=-n}^{n} (n+2)\mu B_n^m \mathbb{T}_n^m - \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} (2n+2)\mu C_n^m \mathbb{N}_n^m,
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

其中 $N = 1, 2, \cdots$ 为正整数。

2.5.2 有界计算区域 Ω_i 上的变分问题及其有限元近似

应用准确的人工边界条件 (2.5.19)，可将三维 Navier 方程组外问题 (2.5.1)~(2.5.3) 简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(x), \quad \forall x\in\Omega_i, \tag{2.5.21}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma} = 0, \tag{2.5.22}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n})|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}). \tag{2.5.23}$$

应用近似人工边界条件 (2.5.20)，可将三维 Navier 方程组外问题 (2.5.1)~(2.5.3) 近似地简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}^N - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^N) = \boldsymbol{f}(x), \quad \forall x\in\Omega_i, \tag{2.5.24}$$

$$\boldsymbol{u}^N|_{\Gamma} = 0, \tag{2.5.25}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}^N)\cdot\boldsymbol{n})|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{T}^N(\boldsymbol{u}^N|_{\Gamma_R}). \tag{2.5.26}$$

令：

$$V_0 = \{v | v\in H^1(\Omega_i), v|_{\Gamma} = 0\},$$
$$\mathbb{V}_0 = V_0\times V_0\times V_0.$$

边值问题 (2.5.21)~(2.5.23) 和 (2.5.24)~(2.5.26) 分别等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找}\boldsymbol{u}\in\mathbb{V}_0,\ \text{使} \\ A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_{\Omega_i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \quad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0, \end{cases} \tag{2.5.27}$$

及

$$\begin{cases} \text{找}\boldsymbol{u}^N\in\mathbb{V}_0,\ \text{使} \\ A(\boldsymbol{u}^N,\boldsymbol{v}) + B_N(\boldsymbol{u}^N,\boldsymbol{v}) = \displaystyle\int_{\Omega_i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \quad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0, \end{cases} \tag{2.5.28}$$

其中，

$$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega_i}\{\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{u})(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + 2\mu\varepsilon(\boldsymbol{u}):\varepsilon(\boldsymbol{v})\}\mathrm{d}x, \quad \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0, \tag{2.5.29}$$

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = R\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}&(n+1)(2n+3) \\ &\cdot\frac{(4n^2+12n+12)\mu + (4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu + (2n+4)\lambda} \\ &\cdot\mu A_n^m\overline{D}_n^m + R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)(n+2)\mu B_n^m\overline{E}_n^m \end{aligned}$$

$$+R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}2n(n+1)(2n-1)\mu C_n^m\overline{F}_n^m,\quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0,\tag{2.5.30}$$

$$\begin{aligned}B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=&R\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}(n+1)(2n+3)\\&\cdot\frac{(4n^2+12n+12)\mu+(4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu+(2n+4)\lambda}\\&\cdot\mu A_n^m\overline{D}_n^m+R\sum_{n=\max\{1,N\}}^{N}\sum_{m=-n}^{n}n(n+1)(n+2)\mu B_n^m\overline{E}_n^m\\&+R\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}2n(n+1)(2n-1)\mu C_n^m\overline{F}_n^m,\quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0,\end{aligned}\tag{2.5.31}$$

其中 (A_n^m,B_n^m,C_n^m) 是 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}$ 的傅氏系数，由 (2.5.13)~(2.5.15) 给出，(D_n^m,E_n^m,F_n^m) 是 $\boldsymbol{v}|_{\Gamma_R}$ 的傅氏系数，即：

$$\begin{aligned}D_n^m=&\frac{1}{(n+1)(2n+3)}\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{v}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{I}}_n^m\mathrm{d}s\\=&\frac{1}{(n+1)(2n+3)R^2}\int_{\Gamma_R}\boldsymbol{v}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{I}}_n^m\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{2.5.32}$$

$$E_n^m=\frac{1}{n(n+1)R^2}\int_{\Gamma_R}\boldsymbol{v}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{T}}_n^m\mathrm{d}s,\tag{2.5.33}$$

$$F_n^m=\frac{1}{n(2n-1)R^2}\int_{\Gamma_R}\boldsymbol{v}(R,\theta,\phi)\cdot\overline{\mathbb{V}}_n^m\mathrm{d}s.\tag{2.5.34}$$

$A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，$B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 是定义于 $\mathbb{V}_0\times\mathbb{V}_0$ 上的对称双线性形式。由 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的表达式 (2.5.30)~(2.5.31) 可知：

$$0\leqslant B_N(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\leqslant B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}),\quad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0.\tag{2.5.35}$$

由 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的定义 (2.5.29) 我们知道 $A(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 是 $\mathbb{V}_0\times\mathbb{V}_0$ 上的有界双线性形式。进一步应用 Korn 不等式可知存在一个常数 $\alpha>0$, 使

$$A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+B_0(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\geqslant\alpha\parallel\boldsymbol{v}\parallel_{1,\Omega_i}^2,\quad \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0.\tag{2.5.36}$$

由不等式 (2.5.36)，我们可以定义空间 $\mathbb{V}_0$ 的一个等价范数

$$\parallel\boldsymbol{v}\parallel_*\equiv\left\{A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+B_0(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\right\}^{\frac{1}{2}},\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0.\tag{2.5.37}$$

对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0$，可将向量值函数开拓到 $B_R=\{x\mid |x|<R\}$ 上，令：

$$\boldsymbol{u}_*=\begin{cases}\boldsymbol{u}, & \forall x\in\Omega_i,\\ \boldsymbol{0}, & \forall x\in\Omega_0,\end{cases}\qquad \boldsymbol{v}_*=\begin{cases}\boldsymbol{v}, & \forall x\in\Omega_i,\\ \boldsymbol{0}, & \forall x\in\Omega_0.\end{cases}$$

我们知道：

$$\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{v}_* \in \mathbb{H}^1(B_R) = \left(H^1(B_R)\right)^3, \tag{2.5.38}$$

并且，

$$A^*(\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{v}_*) \equiv \int_{B_R} \left\{\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_*)(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_*) + 2\mu\varepsilon(\boldsymbol{u}_*):\varepsilon(\boldsymbol{v}_*)\right\} = A(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \tag{2.5.39}$$

另一方面可由 $\boldsymbol{u}$ (其在人工边界 Γ_R 上的值 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}$ 对应的傅氏系数为 (A_n^m, B_n^m, C_n^m))，通过下面变分问题得到一个辅助函数 $\boldsymbol{u}_{\min}$，

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{u}_{\min} \in \mathbb{H}^1(B_R), \text{ 使} \\ \boldsymbol{u}_{\min}|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}, & (2.5.40) \\ A^*(\boldsymbol{u}_{\min}, \boldsymbol{w}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{H}_0^1(B_R), & (2.5.41) \end{cases}$$

其中 $\mathbb{H}_0^1(B_R) = \left(H_0^1(B_R)\right)^3$。对于辅助函数 $\boldsymbol{u}_{\min}$ 有下面的引理成立：

引理 2.5.1

$$\begin{aligned} A^*(\boldsymbol{u}_{\min}, \boldsymbol{v}_*) = {} & R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} 2n(n+1)(2n+3)\mu A_n^m \overline{D}_n^m \\ & + R\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} n(n-1)(n+1)\mu B_n^m \overline{E}_n^m \\ & + R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} n(2n-1) \\ & \cdot \frac{(2n^2+1\lambda)+(2n^2-2n+2)\mu}{(n-1)\lambda+(2n-2)\mu}\mu C_n^m \overline{F}_n^m. \end{aligned}$$

证明 变分问题 (2.5.40)~(2.5.41) 等价于下面边值问题：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}_{\min} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{\min}) = 0, \quad \forall x \in B_R, \tag{2.5.42}$$

$$\boldsymbol{u}_{\min}|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}. \tag{2.5.43}$$

因而可得：

$$A^*(\boldsymbol{u}_{\min}, \boldsymbol{v}_*) = \int_{\Gamma_R} \left(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\min})\cdot\boldsymbol{n}\right)\cdot\boldsymbol{v}_*\mathrm{d}s, \ \forall \boldsymbol{v}_* \in \mathbb{H}^1(B_R). \tag{2.5.44}$$

由于边界值问题 (2.5.42)~(2.5.43) 是在球 B_R 上的第一边值问题，故 $\boldsymbol{u}_{\min}$ 可用 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}$ 表示出来. 由 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}$ 的傅氏展开式：

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} A_n^m \mathbb{I}_n^m + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} B_n^m \mathbb{T}_n^m + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} C_n^m \mathbb{N}_n^m,$$

令:

$$
\boldsymbol{G}_n^* = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{R}\right)^n \displaystyle\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} A_n^m \mathbb{I}_n^m, \quad n=0, \\ \left(\dfrac{r}{R}\right)^n \left\{ \displaystyle\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} A_n^m \mathbb{I}_n^m + \sum_{m=-n}^{n} B_n^m \mathbb{T}_n^m \right. \\ \left. \quad + \displaystyle\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} C_n^m \mathbb{N}_n^m \right\}, \quad n>0. \end{cases}
$$

类似于对外问题的讨论，我们得到内问题 (2.5.42)~(2.5.43) 的解

$$
\boldsymbol{u}_{\min} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \boldsymbol{G}_n^* + c_n^*(r^2 - R^2)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{G}_n^*) \},
$$

其中，

$$
c_n^* = \frac{\lambda + \mu}{(2n-2) + (6n-4)\mu}.
$$

在人工边界 Γ_R 上计算法向应力可得:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{\min}) \cdot \boldsymbol{n} = & \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} A_n^m \mathbb{I}_n^m + \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (n-1)\mu B_n^m \mathbb{T}_n^m \\
& + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} \frac{(2n^2+1)\lambda + (2n^2-2n+2)\mu}{(n-1)\lambda + (3n-2)\mu} \mu C_n^m \mathbb{N}_n^m, \quad (2.5.45)
\end{aligned}
$$

将等式 (2.5.45) 代入 (2.5.44) 引理获证。 ■

引理 2.5.2　存在不依赖于 N 和 R 的常数 C，使

$$
0 \leqslant B_N(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - B_0(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \leqslant B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - B_0(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \leqslant C \parallel \boldsymbol{v} \parallel_*^2, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, \quad (2.5.46)
$$

$$
|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - B_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leqslant C \parallel \boldsymbol{u} \parallel_* \parallel \boldsymbol{v} \parallel_*, \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0, \quad (2.5.47)
$$

$$
|B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - B_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \leqslant C \parallel \boldsymbol{u} \parallel_* \parallel \boldsymbol{v} \parallel_*, \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0. \quad (2.5.48)
$$

证明　对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_0$，

$$
\begin{aligned}
\parallel \boldsymbol{v} \parallel_*^2 \geqslant A(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geqslant & \inf_{\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_0, \boldsymbol{w}|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{v}|_{\Gamma_R}} A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) \\
\geqslant & \inf_{\boldsymbol{w}_* \in \mathbb{H}^1(B_R), \boldsymbol{w}_*|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{v}|_{\Gamma_R}} A^*(\boldsymbol{w}_*,\boldsymbol{w}_*) = A^*(\boldsymbol{v}_{\min},\boldsymbol{v}_{\min}),
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{v}_{\min}$ 是上述极小化问题的解，等价于变分问题:

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{v}_{\min} \in \mathbb{H}^1(B_R), \text{使} \\ \boldsymbol{v}_{\min}|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{v}|_{\Gamma_R}, \\ A^*(\boldsymbol{v}_{\min}, \boldsymbol{w}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{H}_0^1(B_R). \end{cases}$$

由引理 2.5.1 可得：

$$\begin{aligned} A^*(\boldsymbol{v}_{\min}, \boldsymbol{v}_{\min}) =& R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1} 2n(n+1)(2n+3)\mu|D_n^m|^2 \\ &+R\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} n(n-1)(n+1)\mu|E_n^m|^2 \\ &+R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} n(2n-1) \\ &\cdot\frac{(2n^2+1)\lambda+(2n^2-2n+2)\mu}{(n-1)\lambda+(2n-2)\mu}\mu|F_n^m|^2 \\ \geqslant& \frac{R}{C}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{-(n+1)}^{n+1}(n+1)(2n+3) \\ &\cdot\frac{(4n^2+12n+12)\mu+(4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu+(2n+4)\lambda}\mu|D_n^m|^2 \\ &+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)(n+2)\mu|E_n^m|^2 \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1} 2n(n+1)(2n-1)\mu|F_n^m|^2\Big\} \\ =& \frac{1}{C}\big\{B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-B_0(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\big\} \geqslant \frac{1}{C}\big\{B_N(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})-B_0(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\big\}, \end{aligned}$$

其中 C 是一个不依赖于 N 和 R 的常数。由此可立刻得到估计式 (2.5.46)，应用 Schwats 不等式经过类似的分析直接可得估计式 (2.5.47)~(2.5.48)，引理获证。■

应用 Lax-Milgzam 定理可得变分问题 (2.5.27) 的解和问题 (2.5.28) 解的存在唯一性。

定理 2.5.1 假设 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega_i)$，则变分问题 (2.5.27) 存在唯一解 $\boldsymbol{u} \in V_0$，变分问题 (2.5.28) 存在唯一解 $\boldsymbol{u}^N \in \mathbb{V}_0$. ■

为了后面误差分析的需要我们分析双线性形式 $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 与 $B_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 的误差。

引理 2.5.3 设 $\boldsymbol{u}$ 是 Navier 方程组外问题 (2.5.1)~(2.5.3) 的解，则有下面估计式成立：

$$|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant C\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max\{\frac{1}{2},\frac{N-1}{2}\}}\|\boldsymbol{u}\|_{\Delta,\Gamma_0}\|\boldsymbol{v}\|_*,\quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0, N\geqslant 1, \tag{2.5.49}$$

其中 $\|\boldsymbol{u}\|_{\Delta,\Gamma_0}$ 在下面证明中给出。

证明　设 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}$ 的傅氏系数为 (A_n^m,B_n^m,C_n^m) (见 (2.5.13)~(2.5.15)), $\boldsymbol{v}|_{\Gamma_R}$ 的傅氏系数为 (D_n^m,E_n^m,F_n^m)。进一步将 $\boldsymbol{u}$ 在球面 $\Gamma_0=\{x\mid |x|=R_0\}$ 上展开为傅氏级数：

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}\widetilde{A}_n^m\mathbb{I}_n^m+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\widetilde{B}_n^m\mathbb{T}_n^m+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}\widetilde{C}_n^m\mathbb{N}_n^m.$$

令：

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}_n=\begin{cases}\left(\dfrac{R}{r}\right)^{n+1}\displaystyle\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}\widetilde{A}_n^m\mathbb{I}_n^m,\ n=0,\\[2ex] \left(\dfrac{R_0}{r}\right)^{n+1}\left\{\displaystyle\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}\widetilde{A}_n^m\mathbb{I}_n^m+\sum_{m=-n}^{n}\widetilde{B}_n^m\mathbb{T}_n^m\right.\\ \qquad\left.+\displaystyle\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}\widetilde{C}_n^m\mathbb{N}_n^m\right\},\ n>0,\end{cases}$$

则在区域 $\{|x|\geqslant R_0\}$ 上问题 (2.5.1)~(2.5.3) 的解 $\boldsymbol{u}$ 可以表示为：

$$\boldsymbol{u}=\sum_{n=0}^{\infty}[\widetilde{\boldsymbol{G}}_n+c_n(r^2-R_0^2)\nabla(\nabla\cdot\widetilde{\boldsymbol{G}}_n)].$$

在人工边界 Γ_R 上，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R}=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}\widetilde{A}_n^m\mathbb{I}_n^m+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=-n}^{n}\widetilde{B}_n^m\mathbb{T}_n^m\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}\widetilde{C}_n^m\mathbb{N}_n^m+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}\\&\cdot\frac{C_n(n+1)(2n+1)(R^2-R_0^2)R_0^{n+1}}{R^{n+3}}\widetilde{A}_n^m\mathbb{N}_{n+2}^m.\end{aligned}$$

因而可得：

$$A_n^m=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\widetilde{A}_n^m, \tag{2.5.50}$$

$$B_n^m=\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\widetilde{B}_n^m, \tag{2.5.51}$$

$$C_n^m = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1} \widetilde{C}_n^m + \frac{c_{n-2}(n-1)(2n-3)(R^2-R_0^2)R_0^{n-1}}{R^{n+1}} \widetilde{A}_{n-2}^m. \quad (2.5.52)$$

由公式 (2.5.30) 和 (2.5.31) 可得:

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = & R \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} (n+1)(2n+3) \\ & \cdot \frac{(4n^2+12n+12)\mu + (4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu+(2n+4)\lambda} \mu A_n^m \overline{D}_n^m \\ & + R \sum_{n=\max\{2,N+1\}}^{N} \sum_{m=-n}^{n} n(n+1)(n+2)\mu B_n^m \overline{E}_n^m \\ & + R \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} 2n(n+1)(2n-1)\mu C_n^m \overline{F}_n^m. \end{aligned}$$

应用 Schwarz 不等式得到:

$$\begin{aligned} & |B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| \\ \leqslant & \Big\{ R \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} (n+1)(2n+3) \\ & \cdot \frac{(4n^2+12n+12)\mu + (4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu+(2n+4)\lambda} \mu |A_n^m|^2 \\ & + R \sum_{n=\max\{1,N+1\}}^{N} \sum_{m=-n}^{n} n(n+1)(n+2)\mu |B_n^m|^2 \\ & + R \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} 2n(n+1)(2n-1)\mu |C_n^m|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot \Big\{ R \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{n+1} (n+1)(2n+3) \\ & \cdot \frac{(4n^2+12n+12)\mu + (4n^2+8n+6)\lambda}{(6n+10)\mu+(2n+4)\lambda} \mu |D_n^m|^2 \\ & + R \sum_{n=\max\{1,N+1\}}^{N} \sum_{m=-n}^{n} n(n+1)(n+2)\mu |E_n^m|^2 \end{aligned}$$

$$+R\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}2n(n+1)(2n-1)\mu|F_n^m|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant CR^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}(n+1)^3|A_n^m|^2$$

$$+\sum_{n=\max\{2,N+1\}}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n+1)^3|B_n^m|^2$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(n+1)^3|C_n^m|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{v}\|_*, \tag{2.5.53}$$

并且，

$$\sum_{N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(n+1)^3|C_n^m|^2$$

$$\leqslant 2\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(n+1)^3\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{2n+2}|\widetilde{C}_n^m|^2$$

$$+2\sum_{n=\max\{0,N-1\}}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(n+1)^3$$

$$\cdot\frac{C_{n-2}^2(n+1)^2(2n+1)^2(R^2-R_0^2)R_0^{2n+2}}{R^{2n+6}}|\widetilde{A}_n^m|^2$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}(n+1)^3\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{2n+2}|\widetilde{C}_n^m|^2$$

$$+\sum_{n=\max\{0,N-1\}}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(n+1)^5\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{2n+2}|\widetilde{A}_n^m|^2\Big\}. \tag{2.5.54}$$

应用等式 (2.5.50)~(2.5.52)，由不等式 (2.5.53)，(2.5.54) 可得：

$$|B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-B_N(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\leqslant CR^{\frac{1}{2}}\Big\{\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{2n+2}(n+1)^3|\widetilde{A}_n^m|^2$$

$$+\sum_{n=\max\{2,N+1\}}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{2n+2}(n+1)^3|\widetilde{B}_n^m|^2$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{2n+2}(n+1)^3|\widetilde{C}_n^m|^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=\max\{0,N-1\}}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{2n+2}\\
&\cdot(n+1)^3|\widetilde{A}_n^m|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\parallel \boldsymbol{v}\parallel_*\\
\leqslant & C\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(\frac{1}{2},N-\frac{1}{2})}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}[(n+1)^3\\
&+(n+1)^5]|\widetilde{A}_n^m|^2\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n+1)^3|\widetilde{B}_n^m|^2\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(n+1)^3|\widetilde{C}_n^m|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\times\parallel \boldsymbol{v}\parallel_*\\
= & C\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(\frac{1}{2},N-\frac{1}{2})}\parallel \boldsymbol{u}\parallel_{\Delta,\Gamma_0}\parallel \boldsymbol{v}\parallel_*,
\end{aligned}
\tag{2.5.55}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\parallel \boldsymbol{u}\parallel_{\Delta,\Gamma_0}=&\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-(n+1)}^{n+1}[(n+1)^3+(n+1)^5]|\widetilde{A}_n^m|^2\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n+1)^3|\widetilde{B}_n^m|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-(n-1)}^{n-1}(n+1)^3|\widetilde{C}_n^m|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.5.56}
$$

引理获证。 ■

假设 $\mathbb{V}_0^h\subset\mathbb{V}_0$ 是 $\mathbb{V}_0$ 的一个有限子空间，考虑变分问题 (2.5.28) 的有限元近似：

$$
\begin{cases}
\text{找 } \boldsymbol{u}_h^N\in V_0, \text{使}\\
A(\boldsymbol{u}_h^N,\boldsymbol{v})+B_N(\boldsymbol{u}_h^N,\boldsymbol{v})=\displaystyle\int_{\Omega_i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{V}_0^h.
\end{cases}
\tag{2.5.57}
$$

在定理 2.5.1 的条件成立下，近似变分问题 (2.5.57) 存在唯一解，并且下面的误差估计成立：

定理 2.5.2 设 $\boldsymbol{u}\in V_0$ 是变分问题 (2.5.27) 的解，而且 $\parallel \boldsymbol{u}\parallel_{\Delta,\Gamma_0}<\infty, \boldsymbol{u}_h^N\in\mathbb{V}_0^h$ 是近似变分问题 (2.5.57) 的解，则下面的误差估计式成立：

$$
\parallel \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^N\parallel_*\leqslant C\Big\{\inf_{\boldsymbol{v}_h\in\mathbb{V}_0^h}\parallel \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h\parallel_*+\left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(\frac{1}{2},N-\frac{1}{2})}\parallel \boldsymbol{u}\parallel_{\Delta,\Gamma_0}\Big\}.
$$

证明　$\forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h$，令 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}_h^N - \boldsymbol{v}_h$。由变分等式 (2.5.27) 和 (2.5.57) 可得：

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{d} \|_*^2 \leqslant & A(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}) + B_N(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}) \\
= & A(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{d}) + B_N(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{d}) - A(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{d}) - B_N(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{d}) \\
= & A(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{d}) + B_N(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{d}) + B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}) + B_N(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}) \\
\leqslant & C\left\{ \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h^N \|_* + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(\frac{1}{2}, N-\frac{1}{2})} \| \boldsymbol{u} \|_{\Delta, \Gamma_0} \right\} \| \boldsymbol{d} \|_*,
\end{aligned}$$

即：

$$\| \boldsymbol{d} \|_* \leqslant C\left\{ \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|_* + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(\frac{1}{2}, N-\frac{1}{2})} \| \boldsymbol{u} \|_{\Delta, \Gamma_0} \right\}, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h.$$

由三角不等式可得：

$$\begin{aligned}
\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N \|_* \leqslant & \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|_* + \| \boldsymbol{d} \|_* \\
\leqslant & C\left\{ \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|_* + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(\frac{1}{2}, N-\frac{1}{2})} \| \boldsymbol{u} \|_{\Delta, \Gamma_0} \right\},
\end{aligned}$$

即：

$$\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^N \|_* \leqslant C\left\{ \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|_* + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{\max(\frac{1}{2}, N-\frac{1}{2})} \| \boldsymbol{u} \|_{\Delta, \Gamma_0} \right\}.$$

定理获证。■

对于给定的具体有限元子空间 $\mathbb{V}_0^h$，对 $\inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{V}_0^h} \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h \|$ 进行进一步的分析可得出误差对剖分网格尺寸 h 的依赖关系。

附注 2.5.1　在本节中给出的方法可直接应用于处理三维 Stokes 方程组的外问题 (Ⅳ)。完全类似地在人工边界 Γ_R 上可得到三维 Stokes 方程组的外问题的准确整体人工边界条件和高精度的近似整体人工边界条件，从而将原问题简化到有界区域上进行数值计算。详细的论述可参阅论文 (Zheng and Han，2003)。

本章内容的主要参考文献为：Han (1985); Han and Wu (1985-A, 1985-B, 1992); Han and Bao (1997, 2001); Bao and Han (2003); Han and Zheng (2005-B)。其他相关的工作可参阅 Bao (1998, 2000); Bao and Han (1995-A, 1995-B, 1996); Han, Bao and Wang (1997); Han (1995); Yu (1986-A, 1986-B, 1992); Zheng and Han (2002-A, 2002-B)。

第 3 章　热传导方程和 Schrödinger 方程的整体人工边界条件

在前面两章中我们讨论的问题是定常问题，即不依赖于时间的问题。若问题依赖于时间，则相应的人工边界也会依赖于时间。在这一章中我们首先讨论无界区域上热传导方程的人工边界方法，然后讨论与热传导方程比较接近的 Schrödinger 方程在无界区域上的数值解法。

3.1　无界区域上的热传导方程

对于无界区域上的一维热传导方程，空间变量 x 可以在一个方向或者两个方向都无界。不失一般性，我们假设 x 只在一个方向无界，考虑下面的初边值问题：

$$
(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & (x,t)\in D,\\ u(x,0)=\phi(x), & -1\leqslant x<+\infty,\\ u(-1,t)=\psi(t), & 0\leqslant t\leqslant T,\\ u\to 0, \quad \text{当 } x\to+\infty, \end{cases}
$$

其中，

$$
D=\{(x,t)\mid -1\leqslant x<+\infty, 0\leqslant t\leqslant T\},
$$

$f(x,t)$，$\phi(x)$，$\psi(t)$ 是给定函数，$\phi(-1)=\psi(0)$，$f(x,t)$ 和 $\phi(x)$ 的支集有界且

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Supp}\,\{f(x,t)\}\subset D_0=\{(x,t)\mid -1\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T\},\\
&\mathrm{Supp}\,\{\phi(x)\}\subset[-1,0].
\end{aligned}
$$

当 x 在两个方向都无界时，其解法是类似的。

对于无界区域上的二维或者三维热传导方程，其初边值问题的提法如下。设 $\Omega_0\subset R^n(n=2,3)$，是一个有界区域，即 $\Omega_0\subset B_0=\{x\in R^n\mid |x|<R_0\}$，其边界为 Γ。假设

$$
\Omega=R^3\backslash\bar{\Omega}_0,\quad D=\Omega\times(0,T],\quad \Sigma=\Gamma\times(0,T].
$$

在外区域 D 上我们考虑下面的初边值问题：

$$(\text{II})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), & (x,t) \in D, \\ u|_{\Sigma} = g(x,t), & (x,t) \in \Sigma, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u \text{ 有界}, \quad \text{当 } |x| \to \infty. \end{cases}$$

其中 $f(x,t)$，$g(x,t)$ 和 $u_0(x)$ 是给定函数，$f(x,t)$ 和 $u_0(x)$ 在以 R_0 为半径的圆外为零，即

$$f(x,t) = 0, \quad u_0(x) = 0, \quad \forall |x| \geqslant R_0.$$

上述两个初边值问题都是定义在无界的区域上。在初值和边值条件满足一定光滑性条件下，问题 (Ⅰ)∼(Ⅱ) 都是适定的。为了应用标准的有限元或有限差分方法来求解这类问题，我们引进人工边界，例如在问题 (Ⅱ) 中可取人工边界为：

$$\Sigma_R = \{(x,t) \mid |x| = R, 0 \leqslant t \leqslant T\},$$

其中 $R > R_0$ 为一正实数。人工边界 Σ_R 将区域 D 分割为两部分，无界区域 D_e 和有界区域 D_i：

$$D_e = \{(x,t) \mid |x| > R, 0 \leqslant t \leqslant T\},$$
$$D_i = \{(x,t) \mid x \in \Omega \text{ 且 } |x| < R, 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

对给定的问题如果我们能在人工边界 Σ_R 上找出未知函数 $u(x,t)$ 满足的边界条件或者构造出"合适"的近似人工边界条件，我们可以将定义于无界区域 D 上的初边值问题归化为定义于有界计算区域 D_i 上的初边值问题，并在有界区域 D_i 求其数值解。在 3.2 节，3.3 节和 3.4 节中我们将分别讨论无界区域上的一维、二维和三维热传导方程的数值解。

3.2　无界区域上的一维热传导方程

在这一节中我们讨论无界区域上的一维热传导方程的整体边界条件和其近似问题的差分解法。

3.2.1　人工边界 Σ_0 上的准确边界条件

我们考虑下面的初边值问题 (Ⅰ)：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad (x,t) \in D, \tag{3.2.1}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\qquad -1\leqslant x<+\infty,\tag{3.2.2}$$

$$u(-1,t)=\psi(t),\qquad 0\leqslant t<T,\tag{3.2.3}$$

$$u\to 0,\quad 当\ x\to+\infty.\tag{3.2.4}$$

对于这个问题，人工边界可以选为:

$$\varSigma_0=\{(x,t)\mid x=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}.$$

人工边界 $\varSigma_0$ 将无界区域 $D=\{(x,t)|-1<x<+\infty,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}$ 分割为无界区域 $D_e=\{(x,t)|0<x<+\infty,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}$ 和有界区域 $D_i=\{(x,t)|-1<x<0,\quad 0\leqslant t\leqslant T\}$。在无界区域 D_e 上问题 (3.2.1)~(3.2.4) 的解满足下面的半无界问题:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad (x,t)\in D_e,\\&u(x,0)=0,\qquad 0\leqslant x<+\infty,\\&u\to 0,\quad 当\ x\to+\infty.\end{aligned}$$

当 $u(0,t)$ 给定时，这个问题的解可以表达为 (参考 Carslaw and Jaeqer, 1959):

$$u(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t u(0,\lambda)(t-\lambda)^{-3/2}\mathrm{e}^{-x^2/4(t-\lambda)}\mathrm{d}\lambda.\tag{3.2.5}$$

令 $\mu=x/(2\sqrt{t-\lambda})$，我们得到:

$$u(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty}u\Big(0,t-\frac{x^2}{4\mu^2}\Big)\mathrm{e}^{-\mu^2}\mathrm{d}\mu,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=&\frac{-2u(0,0)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-x^2/4t}}{2\sqrt{t}}\\&+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\Big(0,t-\frac{x^2}{4\mu^2}\Big)\Big(-\frac{2x}{4\mu^2}\Big)\mathrm{e}^{-\mu^2}\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

变换回原变量 λ (并注意 $u(0,0)=0$) 可得:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial u\,(0,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{e}^{-x^2/4(t-\lambda)}\mathrm{d}\lambda.$$

当 $x\to+0$ 我们得到 $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial t}$ 之间的一个关系式:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial u(0,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda.\tag{3.2.6}$$

这个关系式是问题 (3.2.1)~(3.2.4) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_0 上所满足的准确边界条件。利用边界条件 (3.2.6) 我们可以将原问题 (3.2.1)~(3.2.4) 简化为一个有界区域上的初边值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \qquad (x,t)\in D_i, \tag{3.2.7}$$

$$u(x,0)=\phi(x), \qquad -1\leqslant x\leqslant 0, \tag{3.2.8}$$

$$u(-1,t)=\psi(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.2.9}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial u\,(0,\lambda)}{\partial \lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.2.10}$$

3.2.2　简化边值问题 (3.2.7)~(3.2.10) 的差分近似

下面我们考虑边值问题 (3.2.7)~(3.2.10) 的差分近似。设 M 和 K 是两个正整数，令 $h=1/M$ 及 $\tau=T/K$。构造差分网格 $\Omega_h\times\Omega_\tau$，其中，

$$\Omega_h=\{x_i \mid x_i=-1+ih, 0\leqslant i\leqslant M\},$$
$$\Omega_\tau=\{t_n \mid t_n=n\tau, 0\leqslant n\leqslant K\}.$$

假设 $w=\{w_i^n \mid 0\leqslant i\leqslant M, 0\leqslant n\leqslant K\}$ 是定义在 $\Omega_h\times\Omega_\tau$ 上的网格函数，令 $x_{i-\frac12}=(x_i+x_{i-1})/2$，　$t_{n-\frac12}=(t_n+t_{n-1})/2$，及 $f_{i-\frac12}^{n-\frac12}=f(x_{i-\frac12},t_{n-\frac12})$。我们引进下面的记号：

$$w_{i-\frac12}^n=\frac12(w_i^n+w_{i-1}^n), \qquad \delta_x w_{i-\frac12}^n=\frac1h(w_i^n-w_{i-1}^n),$$

$$w_i^{n-\frac12}=\frac12(w_i^n+w_i^{n-1}), \qquad \delta_t w_i^{n-\frac12}=\frac1\tau(w_i^n-w_i^{n-1}),$$

$$\delta_x^2 w_i^n=\frac{1}{h^2}(w_{i+1}^n-2w_i^n+w_{i-1}^n), \qquad \|w^n\|_A=\sqrt{h\sum_{i=1}^M (w_{i-\frac12}^n)^2},$$

$$\|\delta_x w^n\|=\sqrt{h\sum_{i=1}^M(\delta_x w_{i-\frac12}^n)^2}, \qquad \|w^n\|_\infty=\max_{0\leqslant i\leqslant M}|w_i^n|,$$

$$\|f^{n-\frac12}\|=\sqrt{h\sum_{i=1}^M(f_{i-\frac12}^{n-\frac12})^2}.$$

首先我们证明下面两个引理。

引理 3.2.1 设 $f(t) \in C^2[0, t_n]$，则：

$$\left| \int_0^{t_n} \frac{f'(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{t_n - t}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t_n - t}} \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{12}(20\sqrt{2} - 23) \max_{0 \leqslant t \leqslant t_n} |f''(t)|\, \tau^{3/2}.$$

证明 首先，对任意 τ 和 $t_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$，我们证明下面的不等式：

$$\begin{aligned}
\frac{\tau^{3/2}}{12}\left[1 - \left(\frac{\tau}{t_n}\right)^{1/2}\right] \leqslant & \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sqrt{t_n - t} - \left(\frac{t_k - t}{\tau}\sqrt{t_n - t_{k-1}}\right.\right. \\
& \left.\left. + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}\sqrt{t_n - t_k}\right)\right] \mathrm{d}t \\
\leqslant & \frac{1}{24}(20\sqrt{2} - 23)\tau^{3/2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad (3.2.11)
\end{aligned}$$

由多项式插值定理我们得到：

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sqrt{t_n - t} - \left(\frac{t_k - t}{\tau}\sqrt{t_n - t_{k-1}} + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}\sqrt{t_n - t_k}\right)\right] \mathrm{d}t \\
= & \sum_{k=1}^{n-2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{8}(t_n - \xi_k)^{-3/2}(t - t_{k-1})(t_k - t)\mathrm{d}t \\
\leqslant & \frac{1}{48}\tau^3 \sum_{k=1}^{n-2} (t_n - t_k)^{-3/2} \\
\leqslant & \frac{1}{48}\tau^2 \sum_{k=1}^{n-2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - t)^{-3/2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{24}\tau^{3/2}, \qquad (3.2.12)
\end{aligned}$$

其中 $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$。另一方面，

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=n-1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sqrt{t_n - t} - \left(\frac{t_k - t}{\tau}\sqrt{t_n - t_{k-1}} + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}\sqrt{t_n - t_k}\right)\right] \mathrm{d}t \\
= & \int_{t_{n-2}}^{t_n} \sqrt{t_n - t}\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{2}\sqrt{t_n - t_{n-2}} + \sqrt{t_n - t_{n-1}}\right)\tau \\
= & \left(\frac{5}{6}\sqrt{2} - 1\right)\tau^{3/2}. \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

将 (3.2.12) 和 (3.2.13) 式相加，我们得到 (3.2.11) 式的右端。类似地我们可以得到 (3.2.11) 式的左端。再利用带有积分余项的 Taylor 展开式，分部积分，及利用

不等式 (3.2.11) 我们可得到引理的结果：

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{t_n} f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t_n-t}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t_n-t}}\right|\\
=&\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{\tau}\Big[\int_{t_{k-1}}^{t} f''(s)(s-t_{k-1})\mathrm{d}s-\int_{t}^{t_k} f''(s)(t_k-s)\mathrm{d}s\Big]\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t_n-t}}\right|\\
=&2\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f''(s)\Big[\sqrt{t_n-s}-\Big(\frac{t_k-s}{\tau}\sqrt{t_n-t_{k-1}}\right.\\
&\left.+\frac{s-t_{k-1}}{\tau}\sqrt{t_n-t_k}\Big)\Big]\mathrm{d}s\right|\\
\leqslant&\frac{1}{12}(20\sqrt{2}-23)\max_{0\leqslant t\leqslant t_n}|f''(t)|\cdot\tau^{3/2}.
\end{aligned}$$

■

引理 3.2.2　设 $f(t)\in C^2[0,t_n]$ 及 $g(t)=(t_n-t)^{-3/2}\mathrm{e}^{-a^2/4(t_n-t)}$，$a>0$，则

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{t_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[f(t_k)+f(t_{k-1})\right]\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\mathrm{d}t\right|\\
\leqslant&\Big(\frac{2c}{a^3}\max_{0\leqslant t\leqslant t_n}|f'(t)|+\frac{\sqrt{\pi}}{4a}\max_{0\leqslant t\leqslant t_n}|f''(t)|\Big)\tau^2,
\end{aligned}$$

其中 $c=\int_0^{\infty}\left|\frac{3}{2}-\mu^2\right|\mu^2\mathrm{e}^{-\mu^2}\mathrm{d}\mu$.

证明　对任意 $t\in[t_{k-1},t_k]$，由多项式插值定理我们有：

$$\begin{aligned}
f(t)=&\frac{1}{2}[f(t_k)+f(t_{k-1})]+\frac{1}{\tau}\left[f(t_k)-f(t_{k-1})\right](t-t_{k-\frac{1}{2}})\\
&+\frac{1}{2}f''(\xi_k)(t-t_k)(t-t_{k-1})
\end{aligned}$$

其中 $\xi_k\in(t_{k-1},t_k)$。因而，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[f(t_k)+f(t_{k-1})\right]\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\mathrm{d}t\\
=&\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big[f(t)-\frac{1}{2}(f(t_k)+f(t_{k-1}))\Big]g(t)\mathrm{d}t\\
=&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tau}\left(f(t_k)-f(t_{k-1})\right)\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t-t_{k-\frac{1}{2}})g(t)\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f''(\xi_k)(t-t_k)(t-t_{k-1})g(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\equiv (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}).$$

对于第一项，由

$$\begin{aligned}
\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-\frac{1}{2}}) g(t) \mathrm{d}t &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-\frac{1}{2}}) \left[g(t_{k-\frac{1}{2}}) + \int_{t_{k-\frac{1}{2}}}^{t} g'(s) \mathrm{d}s \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_{k-\frac{1}{2}}} \int_{t_{k-\frac{1}{2}}}^{t} (t - t_{k-\frac{1}{2}}) g'(s) \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{t_{k-\frac{1}{2}}}^{t_k} \int_{t_{k-\frac{1}{2}}}^{t} (t - t_{k-\frac{1}{2}}) g'(s) \mathrm{d}s \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(s) \left[\frac{\tau^2}{4} - (s - t_{k-\frac{1}{2}})^2 \right] \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

其中最后的等式由交换积分次序得到。由此我们得到：

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{I})| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-\frac{1}{2}}) g(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant t_n} |f'(t)| \cdot \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - t_{k-\frac{1}{2}}) g(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant t_n} |f'(t)| \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8} \tau^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} |g'(t)| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{2c}{a^3} \tau^2 \max_{0 \leqslant t \leqslant t_n} |f'(t)|.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

对于第二项，我们有：

$$\begin{aligned}
|(\mathrm{II})| &= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f''(\xi_k)(t - t_k)(t - t_{k-1}) g(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \frac{1}{8} \tau^2 \max_{0 \leqslant t \leqslant t_n} |f''(t)| \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t) \mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{4\sqrt{\pi}}{a} \tau^2 \max_{0 \leqslant t \leqslant t_n} |f''(t)|.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

综合 (3.2.14) 和 (3.2.15) 我们得到引理的结果。 ■

下面我们用降阶法来推导 (3.2.1)~(3.2.4) 的差分近似。首先引进新变量 $v = \dfrac{\partial u}{\partial x}$。则 (3.2.1)~(3.2.4) 等价于：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = f(x, t), \qquad (x, t) \in D_i, \tag{3.2.16}$$

$$v-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad (x,t)\in D_i, \tag{3.2.17}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\qquad -1\leqslant x\leqslant 0, \tag{3.2.18}$$

$$u(-1,t)=\psi(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.2.19}$$

$$v(0,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial u(0,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.2.20}$$

定义网格函数：

$$U_i^n=u(x_i,t_n),\quad V_i^n=v(x_i,t_n),\quad 0\leqslant i\leqslant M,\ 0\leqslant n\leqslant K.$$

利用引理 3.2.1，由 (3.2.20) 得到：

$$\begin{aligned}V_M^n&=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial u(0,\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{t_n-\lambda}}\\&=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^n\frac{U_M^k-U_M^{k-1}}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{t_n-\lambda}}+O(\tau^{3/2})\\&=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^n(U_M^k-U_M^{k-1})a_{n-k}+O(\tau^{3/2})\\&=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[a_0U_M^n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_M^k\right]+O(\tau^{3/2}),\\&\qquad\qquad n=1,2,3,\cdots,\end{aligned}$$

其中，

$$a_m=\frac{1}{\sqrt{t_{m+1}}+\sqrt{t_m}}=\frac{1}{\sqrt{\tau}(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})},\quad m=0,1,2,\cdots. \tag{3.2.21}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}V_M^{n-\frac12}&=\frac12(V_M^n+V_M^{n-1})\\&=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[a_0U_M^{n-\frac12}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_M^{k-\frac12}\right]+O(\tau^{3/2}).\end{aligned}$$

再利用 Taylor 展开式我们得到：

$$\delta_tU_{i-\frac12}^{n-\frac12}-\delta_xV_{i-\frac12}^{n-\frac12}=f_{i-\frac12}^{n-\frac12}+p_{i-\frac12}^{n-\frac12},\quad 1\leqslant i\leqslant M,\quad 1\leqslant n\leqslant K, \tag{3.2.22}$$

$$V_{i-\frac12}^{n-\frac12}-\delta_xU_{i-\frac12}^{n-\frac12}=q_{i-\frac12}^{n-\frac12},\quad 1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant n\leqslant K, \tag{3.2.23}$$

$$U_i^0 = \phi(x_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant M, \tag{3.2.24}$$

$$U_0^n = \psi(t_n), \qquad 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.25}$$

$$V_M^{n-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big[a_0 U_M^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1} - a_{n-k})U_M^{k-\frac{1}{2}}\Big] + s^{n-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.26}$$

其中，

$$|p_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}| \leqslant c(\tau^2 + h^2), \quad |q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}| \leqslant c(\tau^2 + h^2), \quad 1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.27}$$

$$|s^{n-\frac{1}{2}}| \leqslant c\tau^{3/2}, \quad 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.28}$$

c 是一个常数。由 (3.2.22)~(3.2.26) 我们得到 (3.2.16)~(3.2.20) 的差分近似:

$$\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \delta_x v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.29}$$

$$v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.30}$$

$$u_i^0 = \phi(x_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant M, \tag{3.2.31}$$

$$u_0^n = \psi(t_n), \qquad 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.32}$$

$$v_M^{n-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big[a_0 u_M^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1} - a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\Big], \quad 1 \leqslant n \leqslant K. \tag{3.2.33}$$

定理 3.2.1 差分格式 (3.2.29)~(3.2.33) 等价于下面的差分格式:

$$u_0^n = \psi(t_n), \qquad 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.34}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \delta_t u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\Big) - \delta_x^2 u_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big(f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\Big), \quad 1 \leqslant i \leqslant M-1,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.35}$$

$$\delta_t u_{M-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{2}{h}\Big[\frac{-2}{\sqrt{\pi}}\Big(a_0 u_M^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1} - a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\Big) - \delta_x u_{M-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\Big] = f_{M-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.36}$$

$$u_i^0 = \phi(x_i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant M, \tag{3.2.37}$$

并且有:

$$v_i^{n-\frac{1}{2}} = \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}h\Big(\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\Big),\quad 1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.38}$$

$$v_0^{n-\frac{1}{2}} = \delta_x u_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}h\Big(\delta_t u_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\Big),\ 1 \leqslant n \leqslant K. \tag{3.2.39}$$

证明　将 (3.2.29) 乘以 $\frac{h}{2}$ 并利用 (3.2.30) 我们得到：

$$v_i^{n-\frac{1}{2}} = \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}h\Big(\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\Big),\quad 1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.40}$$

和

$$v_i^{n-\frac{1}{2}} = \delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}h\Big(\delta_t u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\Big),\quad 0 \leqslant i \leqslant M-1,\ 1 \leqslant n \leqslant K. \tag{3.2.41}$$

由 (3.2.40) 和 (3.2.41) 可得：

$$\delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}h\left(\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right) = \delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}h\left(\delta_t u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right),\quad 0 \leqslant i \leqslant M-1,\ 1 \leqslant n \leqslant K,$$

或者：

$$\frac{1}{2}\left(\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \delta_t u_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right) - \delta_x^2 u_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right),\quad 0 \leqslant i \leqslant M-1,\ 1 \leqslant n \leqslant K,$$

上式就是 (3.2.35)。并不难看出 (3.2.29) 和 (3.2.30) 等价于 (3.2.35)，(3.2.38) 和 (3.2.39)。在 (3.2.40) 中令 $i = M$ 可知 (3.2.33) 等价于：

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[a_0 u_M^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1} - a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\right] = \delta_x u_{M-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}h\left(\delta_t u_{M-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{M-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right),\quad 1 \leqslant n \leqslant K,$$

两边除以 $\dfrac{h}{2}$ 即得 (3.2.36). ∎

3.2.3　差分格式 (3.2.29)~(3.2.33) 的稳定性和收敛性分析

在这一节中我们讨论差分格式 (3.2.29)~(3.2.33) 的稳定性和收敛性。首先引进下面两个引理。

引理 3.2.3 对任意 $F=\{F_1,F_2,F_3,\cdots\}$, 我们有：

$$\sum_{l=1}^{n}\Big[a_0F_l-\sum_{k=1}^{l-1}(a_{l-k-1}-a_{l-k})F_k\Big]F_l\geqslant\frac{1}{2\sqrt{2t_n}}\sum_{l=1}^{n}F_l^2,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

其中 a_m 由 (3.2.21) 定义。

证明

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n}\Big[a_0F_l-\sum_{k=1}^{l-1}(a_{l-k-1}-a_{l-k})F_k\Big]F_l\\=&\sum_{l=1}^{n}a_0F_l^2-\sum_{l=2}^{n}\sum_{k=1}^{l-1}(a_{l-k-1}-a_{l-k})F_kF_l\\\geqslant&\sum_{l=1}^{n}a_0F_l^2-\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{n}\sum_{k=1}^{l-1}(a_{l-k-1}-a_{l-k})(F_k^2+F_l^2)\end{aligned}$$

交换求和次序我们得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n}\Big[a_0F_l-\sum_{k=1}^{l-1}(a_{l-k-1}-a_{l-k})F_k\Big]F_l\\\geqslant&\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}(a_{l-1}+a_{n-l})F_l^2\\\geqslant&\frac{1}{2\sqrt{2t_n}}\sum_{l=1}^{n}F_l^2,\ n=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

■

引理 3.2.4 假设 $\{u_i^n,v_i^n\}$ 是下面差分方程的解：

$$\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-\delta_x v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}=P_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}},\quad 1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant n\leqslant K,\tag{3.2.42}$$

$$v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-\delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}=Q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}},\quad 1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant n\leqslant K,\tag{3.2.43}$$

$$u_i^0=\Phi(x_i),\quad 0\leqslant i\leqslant M,\tag{3.2.44}$$

$$u_0^n=0,\quad 1\leqslant n\leqslant K,\tag{3.2.45}$$

$$v_M^{n-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big[a_0u_M^{n-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\Big]+S^{n-\frac{1}{2}},\quad 1\leqslant n\leqslant K,\tag{3.2.46}$$

其中 $\Phi(x_0)=0$, 则下面的不等式成立：

$$\|u^n\|_A^2+\frac{\tau}{2}\sum_{k=1}^{n}\|\delta_xu^{l-\frac{1}{2}}\|^2\leqslant\|u^0\|_A^2+\sqrt{\frac{\pi t_n}{2}}\tau\sum_{l=1}^{n}\Big(S^{l-\frac{1}{2}}\Big)^2$$

$$+\tau\sum_{l=1}^{n}\Big(2\|P^{l-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{7}{2}\|Q^{l-\frac{1}{2}}\|^2\Big),1\leqslant n\leqslant K.$$

证明　将 (3.2.42) 式乘以 $2u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$，(3.2.43) 式乘以 $2v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$，然后相加得到：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\Big[\left(u_{i-\frac{1}{2}}^{n}\right)^2-\left(u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}\right)^2\Big]+2\left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)^2\\
=&\frac{2}{h}\left(u_i^{n-\frac{1}{2}}v_i^{n-\frac{1}{2}}-u_{i-1}^{n-\frac{1}{2}}v_{i-1}^{n-\frac{1}{2}}\right)+2u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}P_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}+2v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}Q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\\
\leqslant&\frac{2}{h}\left(u_i^{n-\frac{1}{2}}v_i^{n-\frac{1}{2}}-u_{i-1}^{n-\frac{1}{2}}v_{i-1}^{n-\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)^2+2\left(P_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)^2\\
&+\frac{1}{2}\left(v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)^2+2\left(Q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\right)^2,\quad 1\leqslant i\leqslant M,\quad 1\leqslant n\leqslant K.
\end{aligned}\tag{3.2.47}$$

以 h 乘以上面不等式，再对 i 从 1 到 M 求和可得：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\left(\|u^n\|_A^2-\|u^{n-1}\|_A^2\right)+2\|v^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2\\
\leqslant&2u_M^{n-\frac{1}{2}}v_M^{n-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\|u^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2\\
&+\frac{1}{2}\|v^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2+2\|P^{n-\frac{1}{2}}\|^2+2\|Q^{n-\frac{1}{2}}\|^2.
\end{aligned}\tag{3.2.48}$$

由 (3.2.43) 我们得到：

$$\|u^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2\leqslant\frac{1}{2}\|\delta_x u^{n-\frac{1}{2}}\|^2\leqslant\|v^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2+\|Q^{n-\frac{1}{2}}\|^2,\quad 1\leqslant n\leqslant K.\tag{3.2.49}$$

将 (3.2.49) 代入到 (3.2.48) 的右端得到：

$$\frac{1}{\tau}\left(\|u^n\|_A^2-\|u^{n-1}\|_A^2\right)+\|v^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2\leqslant 2u_M^{n-\frac{1}{2}}v_M^{n-\frac{1}{2}}+2\|P^{n-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{5}{2}\|Q^{n-\frac{1}{2}}\|^2.$$

再利用 (3.2.49) 和 (3.2.46) 我们得到：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\left(\|u^n\|_A^2-\|u^{n-1}\|_A^2\right)+\frac{1}{2}\|\delta_x u^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2\\
\leqslant&2u_M^{n-\frac{1}{2}}v_M^{n-\frac{1}{2}}+2\|P^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2+\frac{7}{2}\|Q^{n-\frac{1}{2}}\|_A^2\\
\leqslant&2u_M^{n-\frac{1}{2}}\Big\{-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big[a_0u_M^{n-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\Big]+S^{n-\frac{1}{2}}\Big\}\\
&+2\|P^{n-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{7}{2}\|Q^{n-\frac{1}{2}}\|^2\\
\leqslant&-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\Big[a_0u_M^{n-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\Big]u_M^{n-\frac{1}{2}}+2u_M^{n-\frac{1}{2}}S^{n-\frac{1}{2}}\\
&+2\|P^{n-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{7}{2}\|Q^{n-\frac{1}{2}}\|^2,
\end{aligned}$$

和

$$\frac{1}{\tau}\left[\left(\|u^n\|_A^2+\frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n}\|\delta_x u^{l-\frac{1}{2}}\|^2\right)-\left(\|u^{n-1}\|_A^2+\frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n-1}\|\delta_x u^{l-\frac{1}{2}}\|^2\right)\right]$$

$$\leqslant -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[a_0u_M^{n-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\right]u_M^{n-\frac{1}{2}}$$

$$+2u_M^{n-\frac{1}{2}}S^{n-\frac{1}{2}}+2\|P^{n-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{7}{2}\|Q^{n-\frac{1}{2}}\|^2,\quad 1\leqslant n\leqslant K.$$

以 τ 乘以上列不等式，对 n 求和，再利用引理 3.2.3，即可得引理结果：

$$\|u^n\|_A^2+\frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n}\|\delta_x u^{l-\frac{1}{2}}\|^2$$

$$\leqslant \|u^0\|_A^2-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\tau\sum_{l=1}^{n}\left[a_0u_M^{l-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{l-1}(a_{l-k-1}-a_{l-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\right]u_M^{l-\frac{1}{2}}$$

$$+2\tau\sum_{l=1}^{n}u_M^{l-\frac{1}{2}}S^{l-\frac{1}{2}}+\tau\sum_{l=1}^{n}\left(2\|P^{l-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{7}{2}\|Q^{l-\frac{1}{2}}\|^2\right)$$

$$\leqslant \|u^0\|_A^2-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{2t_n}}\tau\sum_{l=1}^{n}(u_M^{l-\frac{1}{2}})^2+\sqrt{\frac{2}{\pi t_n}}\,\tau\sum_{l=1}^{n}(u_M^{l-\frac{1}{2}})^2$$

$$+\sqrt{\frac{\pi t_n}{2}}\,\tau\sum_{l=1}^{n}(S^{l-\frac{1}{2}})^2+\tau\sum_{l=1}^{n}\left(2\|P^{l-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{7}{2}\|Q^{l-\frac{1}{2}}\|^2\right)$$

$$=\|u^0\|_A^2+\sqrt{\frac{\pi t_n}{2}}\tau\sum_{l=1}^{n}(S^{l-\frac{1}{2}})^2+\tau\sum_{l=1}^{n}\left(2\|P^{l-\frac{1}{2}}\|^2+\frac{7}{2}\|Q^{l-\frac{1}{2}}\|^2\right),$$

$$n=1,2,\cdots.$$ ■

定理 3.2.2 差分格式 (3.2.34)~(3.2.37) 存在唯一解。

证明 由定理 3.2.1，我们只需证明差分格式 (3.2.29)~(3.2.33) 存在唯一解。考虑对应的齐次差分方程：

$$\delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-\delta_x v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant n\leqslant K,$$

$$v_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-\delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant M,\ 1\leqslant n\leqslant K,$$

$$u_i^0=0,\qquad 0\leqslant i\leqslant M,$$

$$u_0^n=0,\qquad 1\leqslant n\leqslant K,$$

$$v_M^{n-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[a_0u_M^{n-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})u_M^{k-\frac{1}{2}}\right],\quad 1\leqslant n\leqslant K.$$

由引理 3.2.4 我们得到：

$$\|u^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n}\|\delta_x u^{l-\frac{1}{2}}\|^2 = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

因此我们有：

$$u_i^n = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant M, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

■

至于稳定性，我们有下面的结果。

定理 3.2.3　设 $\{u_i^n \mid 0 \leqslant i \leqslant M,\ 0 \leqslant n \leqslant K\}$ 是差分格式 (3.2.34)~(3.2.37) 对应于 $\psi(t_n) = 0\ (n \geqslant 0)$ 的解，则有：

$$\begin{aligned}&\|u^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n}\|\delta_x u^{l-\frac{1}{2}}\|^2 \\ \leqslant &\|u^0\|_A^2 + 2\tau\sum_{l=1}^{n}\|f^{l-\frac{1}{2}}\|^2,\ n = 1, 2, \cdots, K,\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

和

$$\begin{aligned}&\|u^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n}\|u^{l-\frac{1}{2}}\|_\infty^2 \\ \leqslant &\|u^0\|_A^2 + 2\tau\sum_{l=1}^{n}\|f^{l-\frac{1}{2}}\|^2,\ n = 1, 2, \cdots, K.\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

证明　由定理 3.2.1，我们只需证明估计式 (3.2.50) 和 (3.2.51) 对于差分格式 (3.2.29)~(3.2.33) 成立。估计式 (3.2.50) 由引理 3.2.4 直接得到，估计式 (3.2.51) 则由 (3.2.50) 及不等式 $\|u^{l-\frac{1}{2}}\|_\infty \leqslant \|\delta_x u^{l-\frac{1}{2}}\|$ 得到。■

下面的定理给出差分格式 (3.2.34)~(3.2.37) 的收敛性。

定理 3.2.4　设 $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,3}([-1,0]\times[0,T])$ 是问题 (3.2.7)~(3.2.10) 的解，设 $\{u_i^n\}$ 是差分方程 (3.2.34)~(3.2.37) 的解。令：

$$\tilde{u}_i^n = U_i^n - u_i^n,\ 0 \leqslant i \leqslant M,\ 0 \leqslant n \leqslant K.$$

则我们有：

$$\begin{aligned}&\|\tilde{u}^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n}\|\delta_x \tilde{u}^{l-\frac{1}{2}}\|^2 \\ \leqslant &T\left[\sqrt{\frac{\pi T}{2}} + \frac{11}{2}\right]c^2(\tau^{3/2} + h^2)^2, \quad 0 \leqslant n \leqslant K\end{aligned} \tag{3.2.52}$$

和

$$\|\tilde{u}^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{l=1}^{n}\|\tilde{u}^{l-\frac{1}{2}}\|_\infty^2$$
$$\leqslant T\left[\sqrt{\frac{\pi T}{2}} + \frac{11}{2}\right]c^2(\tau^{3/2}+h^2)^2, \quad 0 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.53}$$

其中 c 是不依赖于 τ 和 h 的常数。

证明 令:

$$\tilde{v}_i^n = V_i^n - v_i^n, \quad 0 \leqslant i \leqslant M,\ 0 \leqslant n \leqslant K.$$

将 (3.2.29)~(3.2.33) 和 (3.2.22)~(3.2.26) 的各式相减，我们得到误差方程：

$$\delta_t \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \delta_x \tilde{v}_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = p_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.54}$$

$$\tilde{v}_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \delta_x \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = q_{i-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant M,\ 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.55}$$

$$\tilde{u}_i^0 = 0, \qquad 0 \leqslant i \leqslant M, \tag{3.2.56}$$

$$\tilde{u}_0^n = 0, \qquad 1 \leqslant n \leqslant K, \tag{3.2.57}$$

$$\tilde{v}_M^{n-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[a_0\tilde{u}_M^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\tilde{u}_M^{k-\frac{1}{2}}\right] + s^{n-\frac{1}{2}},$$
$$1 \leqslant n \leqslant K. \tag{3.2.58}$$

利用引理 3.2.4，(3.2.27)~(3.2.28) 和 (3.2.56) 式我们得到 (3.2.52)：

$$\|\tilde{u}^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{k=1}^{n}\|\delta_x\tilde{u}^{l-\frac{1}{2}}\|^2$$
$$\leqslant \|\tilde{u}^0\|_A^2 + \sqrt{\frac{\pi t_n}{2}}\tau\sum_{l=1}^{n}(s^{l-\frac{1}{2}})^2 + \tau\sum_{l=1}^{n}\left(2\|p^{l-\frac{1}{2}}\|^2 + \frac{7}{2}\|q^{l-\frac{1}{2}}\|^2\right)$$
$$\leqslant T\left[\sqrt{\frac{\pi T}{2}} + \frac{11}{2}\right]c^2(\tau^{3/2}+h^2)^2, \quad n = 1, 2, \cdots, K.$$

由 (3.2.52) 及不等式 $\|\tilde{u}^{l-\frac{1}{2}}\|_\infty \leqslant \|\delta_x\tilde{u}^{l-\frac{1}{2}}\|$ 即得到 (3.2.53) 式。 ∎

定理 3.2.4 显示对于空间变量其收敛阶是 2，但对于时间变量收敛阶则为 3/2。不过，如果我们在人工边界条件中用二次插值去近似 u，则我们可以期望得到对于时间变量的二阶收敛。当然，相应的差分格式将更为复杂。

3.3 二维热传导方程外问题的整体边界条件

在这一节中我们讨论二维热传导方程外问题 (II) 的整体边界条件及其近似问题的差分方法。

3.3.1　人工边界 Σ_R 上的准确边界条件和近似人工边界条件

我们考虑下面的二维热传导方程的初边值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{3.3.1}$$

$$u|_{\Sigma} = g(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \tag{3.3.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3.3.3}$$

$$u \text{ 有界, 当 } |x| \to \infty. \tag{3.3.4}$$

人工边界 Σ_R 将区域 D 分为两部分，有界区域 D_i 和无界区域 D_e。我们将先找出 Σ_R 上的人工边界条件，这样 (3.3.1)~(3.3.4) 就可以简化为一个有界区域上的初边值问题。为此，在区域 D_e 上考虑问题 (3.3.1)~(3.3.4)。在极坐标下我们得到：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \qquad (r,\theta,t) \in D_e, \tag{3.3.5}$$

$$u|_{\Sigma_R} = u(R,\theta,t), \tag{3.3.6}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{3.3.7}$$

$$u \text{ 有界, 当 } r \to \infty. \tag{3.3.8}$$

将问题 (3.3.5)~(3.3.8) 的解展开为：

$$u(r,\theta,t) = \frac{1}{2}u_0(r,t) + \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(r,t)\cos n\theta + v_n(r,t)\sin n\theta]. \tag{3.3.9}$$

代入 (3.3.5) 可得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2}u_n\right]\cos n\theta\right.\\&\left.+\left[\frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_n}{\partial r} + \frac{n^2}{r^2}v_n\right]\sin n\theta\right\} = 0.\end{aligned}$$

由此我们得到：

1. $u_0(r,t)$ 满足：

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_0}{\partial r}, \qquad r > R, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{3.3.10}$$

$$u_0|_{r=R} = a_0(t), \tag{3.3.11}$$

$$u_0|_{t=0} = 0, \quad r > R, \tag{3.3.12}$$

$$u_0 \text{ 有界, 当 } r \to \infty. \tag{3.3.13}$$

2. $u_n(r,t)$ 满足：

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}u_n,\quad r>R,\quad 0<t\leqslant T,\tag{3.3.14}$$

$$u_n|_{r=R}=a_n(t),\tag{3.3.15}$$

$$u_n|_{t=0}=0,\tag{3.3.16}$$

$$u_n\ 有界,\ 当\ r\to\infty.\tag{3.3.17}$$

3. $v_n(r,t)$ 满足：

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}=\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}v_n,\quad r>R,\quad 0<t\leqslant T,\tag{3.3.18}$$

$$v_n|_{r=R}=b_n(t),\tag{3.3.19}$$

$$v_n|_{t=0}=0,\tag{3.3.20}$$

$$v_n\ 有界,\ 当\ r\to\infty.\tag{3.3.21}$$

其中 $a_0(t),a_n(t),b_n(t)$ 是 $u(R,\theta,t)$ 的 Fourier 系数：

$$u(R,\theta,t)=\frac{a_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(t)\cos n\theta+b_n(t)\sin n\theta],$$

$$a_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta,t)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$b_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta,t)\sin n\theta\mathrm{d}\theta.$$

当 $a_0(t)=1$ 时，(3.3.10)~(3.4.13) 的解为 (Carslaw and Jaeqer, 1959)：

$$G(r,t)=1+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu^2 t}\frac{J_0(r\mu)Y_0(R\mu)-Y_0(r\mu)J_0(R\mu)}{J_0^2(R\mu)+Y_0^2(R\mu)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}.$$

当 $a_0(t)\neq 1$ 时，利用 Dahamel 原理 (Carslaw and Jaeqer, 1959) 我们得到：

$$\begin{aligned}u_0(r,t)&=\int_0^t a_0(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}G(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=-\int_0^t a_0(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}G(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=-a_0(\lambda)G(r,t-\lambda)|_{\lambda=0}^{\lambda=t}+\int_0^t\frac{\partial a_0(\lambda)}{\partial\lambda}G(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^t\frac{\partial a_0(\lambda)}{\partial\lambda}G(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\end{aligned}\tag{3.3.22}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_0(r,t)}{\partial r} &= \int_0^t \frac{\partial a_0(\lambda)}{\partial \lambda}\frac{\partial G(r,t-\lambda)}{\partial r}\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_0^t \frac{\partial a_0(\lambda)}{\partial \lambda}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu^2(t-\lambda)}\right. \\
&\quad \left.\cdot \frac{J_0'(r\mu)Y_0(R\mu)-Y_0'(r\mu)J_0(R\mu)}{J_0^2(R\mu)+Y_0^2(R\mu)}\mathrm{d}\mu\right\}\mathrm{d}\lambda, \\
\left.\frac{\partial u_0(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R} &= \int_0^t \frac{\partial a_0(\lambda)}{\partial \lambda}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu^2(t-\lambda)}\right. \\
&\quad \left.\cdot \frac{J_0'(R\mu)Y_0(R\mu)-Y_0'(R\mu)J_0(R\mu)}{J_0^2(R\mu)+Y_0^2(R\mu)}\mathrm{d}\mu\right\}\mathrm{d}\lambda. \qquad (3.3.23)
\end{aligned}
$$

令

$$
H_0(t) = -\frac{2R\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu^2 t}\frac{J_0'(R\mu)Y_0(R\mu)-Y_0'(R\mu)J_0(R\mu)}{J_0^2(R\mu)+Y_0^2(R\mu)}\mathrm{d}\mu.
$$

再利用 Wronskian 关系式 (参考 Carslaw and Jaeqer, 1959)：

$$
J_\nu(z)Y_\nu'(z)-J_\nu'(z)Y_\nu(z) = \frac{2}{\pi z},
$$

我们得到：

$$
H_0(t) = \frac{4\sqrt{t}}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mu^2 t}}{\mu[J_0^2(R\mu)+Y_0^2(R\mu)]}\mathrm{d}\mu.
$$

代入 (3.2.22) 式得到：

$$
\left.\frac{\partial u_0(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial a_0(\lambda)}{\partial \lambda}\frac{H_0(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda. \qquad (3.3.24)
$$

为了讨论初边值问题 (3.3.14)~(3.3.17) 的解，首先我们考虑下面一个比较简单的问题：

$$
\frac{\partial G_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}G_n, \qquad r>R, 0<t\leqslant T, \qquad (3.3.25)
$$

$$
G_n|_{r=R} = 1, \qquad (3.3.26)
$$

$$
G_n|_{t=0} = 0, \qquad (3.3.27)
$$

$$
G_n \text{ 有界}, \quad \text{当 } r\to\infty \qquad (3.3.28)
$$

令：

$$
G_n(r,t) = \mathrm{e}^{-\mu^2 t}w(r).
$$

代入 (3.3.25) 式我们得到 $w(r)$ 所满足的方程：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\left(\mu^2-\frac{n^2}{r^2}\right)=0.$$

这是 n 阶 Bessel 方程，其两个线性独立的解是 $J_n(\mu r)$ 和 $Y_n(\mu r)$。因此，对于任何给定的 $\mu>0$，

$$\mathrm{e}^{-\mu^2 t}\frac{J_n(\mu r)Y_n(\mu R)-Y_n(\mu r)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}$$

是 (3.3.25) 的一个解。令：

$$G_*(r,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu^2 t}\frac{J_n(\mu r)Y_n(\mu R)-Y_n(\mu r)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}.$$

则 $G_*(r,t)$ 是 (3.3.25) 的一个解。并且，

$$\begin{aligned}
&G_*(r,t)|_{r=R}=0,\\
&G_*(r,t)|_{t=0}=\lim_{t\to+0}G_*(r,t)\\
&\quad=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_n(\mu r)Y_n(\mu R)-Y_n(\mu r)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=-\left(\frac{R}{r}\right)^n,
\end{aligned}$$

其中最后的等式可以在参考文献 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980, P. 679) 中找到。令：

$$G_n(r,t)=\left(\frac{R}{r}\right)^n+G_*(r,t),$$

则 $G_n(r,t)$ 是 (3.3.25)~(3.3.28) 的解。由 Duhamel 原理我们得到：

$$\begin{aligned}
u_n(r,t)&=\int_0^t a_n(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&=-\int_0^t a_n(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&=-a_n(\lambda)G_n(r,t-\lambda)|_{\lambda=0}^{\lambda=t}+\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&=\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda,
\end{aligned}$$

$u_n(r,t)$ 是 (3.3.14)~(3.3.17) 的解。进一步我们有：

$$\left.\frac{\partial u_n(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}=\left.\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial G_n(r,t-\lambda)}{\partial r}\mathrm{d}\lambda\right|_{r=R}. \tag{3.3.29}$$

另一方面我们有:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G_n(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}&=-\frac{n}{R}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu^2 t}\frac{J_n'(\mu R)Y_n(\mu R)-Y_n'(\mu R)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\\&=-\frac{n}{R}-\frac{4}{\pi^2 R}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\mu^2 t}}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}.\end{aligned}$$

令:

$$H_n(t)=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\mu^2 t}}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu},$$

则:

$$\left.\frac{\partial G_n(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{n}{R}-\frac{H_n(t)}{R\sqrt{\pi t}}. \tag{3.3.30}$$

结合 (3.3.29) 和 (3.3.30) 我们得到:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u_n}{\partial r}\right|_{r=R}&=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{n}{R}\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{H_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\&=-\frac{n}{R}u_n\Big|_{r=R}-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial u_n(R,\lambda)}{\partial\lambda}\frac{H_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

类似地我们可以得到:

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{n}{R}v_n\Big|_{r=R}-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial v_n(R,\lambda)}{\partial\lambda}\frac{H_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,$$

其中 $v_n(r,t)$ 是 (3.3.18)~(3.3.21) 的解，且有:

$$v_n(r,t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}b_n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

由等式 (3.3.9) 我们得到:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}&=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=R}+\sum_{n=1}^\infty\left(\left.\frac{\partial u_n}{\partial r}\right|_{r=R}\cos n\theta+\left.\frac{\partial v_n}{\partial r}\right|_{r=R}\sin n\theta\right)\\&=-\frac{1}{2R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial u_0(R,\lambda)}{\partial\lambda}\frac{H_0(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\&\quad-\sum_{n=1}^\infty\frac{n}{R}(u_n|_{r=R}\cos n\theta+v_n|_{r=R}\sin n\theta)\\&\quad-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^\infty\int_0^t\left[\frac{\partial u_n(R,\lambda)}{\partial\lambda}\cos n\theta+\frac{\partial v_n(R,\lambda)}{\partial\lambda}\sin n\theta\right]\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{H_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda.$$

再由关系式

$$u_n(r,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\phi,t)\cos n\phi\mathrm{d}\phi,$$
$$v_n(r,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\phi,t)\sin n\phi\mathrm{d}\phi,$$

我们得到人工边界 Σ_R 上的一个准确的边界条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta,t)\Big|_{r=R}=&-\frac{1}{2R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\phi,\lambda)}{\partial\lambda}\mathrm{d}\phi\frac{H_0(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\&-\frac{1}{R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\phi,\lambda)}{\partial\lambda}\cos n(\phi-\theta)\mathrm{d}\phi\\&\cdot\frac{H_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{R\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^{2\pi}u(R,\phi,t)\cos n(\phi-\theta)\mathrm{d}\phi\\\equiv&\,\mathcal{K}_\infty\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t}\Big).\end{aligned}\tag{3.3.31}$$

在实际计算中，我们只需要取无穷级数中的前几项，这样我们得到下面的近似人工边界条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta,t)\Big|_{r=R}=&-\frac{1}{2R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\phi,\lambda)}{\partial\lambda}\mathrm{d}\phi\frac{H_0(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\&-\frac{1}{R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\phi,\lambda)}{\partial\lambda}\cos n(\phi-\theta)\mathrm{d}\phi\\&\cdot\frac{H_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{R\pi}\sum_{n=1}^{N}n\int_0^{2\pi}u(R,\phi,t)\cos n(\phi-\theta)\mathrm{d}\phi\\\equiv&\,\mathcal{K}_N\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t}\Big).\end{aligned}\tag{3.3.32}$$

利用人工边界条件 (3.3.31) 和 (3.3.32)，我们可以将无界区域上的问题 (3.3.1)~(3.3.4) 简化为下面有界计算区域上的问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+f(r,\theta,t),\quad(r,\theta,t)\in D_i,\tag{3.3.33}$$
$$u|_\Sigma=g(\theta,t),\tag{3.3.34}$$
$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}=\mathcal{K}_\infty\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t}\Big),\tag{3.3.35}$$
$$u|_{t=0}=u_0(x).\tag{3.3.36}$$

及其近似简化边值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+f(r,\theta,t),\quad (r,\theta,t)\in D_i, \tag{3.3.37}$$

$$u|_{\Sigma}=g(\theta,t), \tag{3.3.38}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\mathcal{K}_N\Big(u,\frac{\partial u}{\partial t}\Big), \tag{3.3.39}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x). \tag{3.3.40}$$

3.3.2 近似简化边值问题 (3.3.37)~(3.3.40) 的差分近似

首先，我们将区间 $[0,T]$ 等分为

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_K=T, \tag{3.3.41}$$

再将 r 方向的区间 $[a,b]$ 和 θ 方向的区间 $[0,2\pi]$ 等分为

$$0=r_0<r_1<\cdots<r_I=b,\quad 0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_J=2\pi. \tag{3.3.42}$$

令 $\tau=T/K$，$h=(b-a)/I$ 及 $\delta=2\pi/J$。对 (3.3.37)~(3.3.40) 应用 Crank-Nicholson 差分格式我们得到：

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i+1,j}^k-2u_{i,j}^k+u_{i-1,j}^k+u_{i+1,j}^{k-1}-2u_{i,j}^{k-1}+u_{i-1,j}^{k-1}}{2h^2}\\
&\quad+\frac{u_{i+1,j}^k-u_{i-1,j}^k+u_{i+1,j}^{k-1}-u_{i-1,j}^{k-1}}{4hr_i}\\
&\quad+\frac{u_{i,j+1}^k-2u_{i,j}^k+u_{i,j-1}^k+u_{i,j+1}^{k-1}-2u_{i,j}^{k-1}+u_{i,j-1}^{k-1}}{2r_i^2\delta^2}\\
&\quad-\frac{u_{i,j}^k-u_{i,j}^{k-1}}{\tau}+\frac{f_{i,j}^k+f_{i,j}^{k-1}}{2}=0,\\
&1\leqslant i\leqslant I,\ 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K,
\end{aligned} \tag{3.3.43}$$

$$u_{i,j}^0=0,\ 1\leqslant i\leqslant I+1,\ 1\leqslant j\leqslant J, \tag{3.3.44}$$

$$u_{0,j}^k=g(\theta_j,t_k),\ 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K, \tag{3.3.45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u_{I+1,j}^k-u_{I-1,j}^k}{2h}&=\mathcal{K}_N\Big(u(r_I,\bullet,\bullet),\frac{\partial u}{\partial t}(r_I,\bullet,\bullet)\Big)(\theta_j,t_k),\\
&\qquad 1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K.
\end{aligned} \tag{3.3.46}$$

在时间的每一步 t_k，我们需要计算人工边界条件中的积分：

$$\int_0^{t_k}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(b,\phi,\lambda)}{\partial\lambda}\cos n(\phi-\theta_j)\mathrm{d}\phi\frac{H_n(t_k-\lambda)}{\sqrt{t_k-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,$$

$$n=0,1,\cdots,N, \tag{3.3.47}$$

$$\int_0^{2\pi}u(b,\phi,t_k)\cos n(\phi-\theta_j)\mathrm{d}\phi,\ n=0,1,\cdots,N, \tag{3.3.48}$$

(3.3.48) 的计算较为简单:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}u(b,\phi,t_k)\cos n(\phi-\theta_j)\mathrm{d}\phi\\
=&\sum_{s=0}^{J-1}\int_{\theta_s}^{\theta_{s+1}}\left[u_{I,s}^k+\frac{(u_{I,s+1}^k-u_{I,s}^k)(\phi-\theta_s)}{\delta}\right]\cos n(\phi-\theta_j)\mathrm{d}\phi\\
=&\frac{1}{n^2\delta}\sum_{s=1}^{J}u_{I,s}^k[\cos(\theta_s-\theta_j)-\cos(\theta_{s+1}-\theta_j)-\cos(\theta_{s-1}-\theta_j)].\end{aligned}$$

对于 (3.3.47) 我们有:

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_k}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(b,\phi,\lambda)}{\partial\lambda}\cos n(\phi-\theta_j)\mathrm{d}\phi\frac{H_n(t_k-\lambda)}{\sqrt{t_k-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\
=&\sum_{l=0}^{k-1}\int_{t_l}^{t_{l+1}}\sum_{s=0}^{J-1}\int_{\theta_s}^{\theta_{s+1}}\left\{\frac{u_{I,s}^{l+1}-u_{I,s}^l}{\tau}+\frac{u_{I,s+1}^{l+1}-u_{I,s+1}^l-u_{I,s}^{l+1}+u_{Ii,s}^l}{\tau}\right.\\
&\left.\cdot\frac{\phi-\theta_s}{\delta}\right\}\cdot\cos n(\phi-\theta_j)\mathrm{d}\phi\frac{H_n(t_k-\lambda)}{\sqrt{t_k-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\
=&\frac{\delta}{\tau}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{J-1}\left(u_{I,s}^{l+1}-u_{I,s}^l\right)[2\cos(\theta_s-\theta_j)-\cos(\theta_{s+1}-\theta_j)\\
&-\cos(\theta_{s-1}-\theta_j)]\cdot\int_{t_l}^{t_{l+1}}\frac{H_n(t_k-\lambda)}{\sqrt{t_k-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

对于其中的积分

$$\int_{t_l}^{t_{l+1}}\frac{H_n(t_k-\lambda)}{\sqrt{t_k-\lambda}}\mathrm{d}\lambda$$

我们可以预先计算 $\frac{H_n(t)}{\sqrt{t}}$ 的函数值，然后用数值积分来近似。

3.4 三维热传导方程外问题的整体边界条件

在这一节中我们讨论无界区域上的三维热传导方程外问题 (II) 的整体边界条件和其近似问题的差分解法。

3.4.1　人工边界 Γ 上的准确边界条件和近似人工边界条件

对于 $n=3$ 我们考虑下面的初边值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{3.4.1}$$

$$u|_{\Sigma}=g(x,t),\qquad (x,t)\in\Sigma, \tag{3.4.2}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\qquad x\in\Omega, \tag{3.4.3}$$

$$u\ \text{有界，当}\ |x|\to\infty. \tag{3.4.4}$$

人工边界 Σ_R 将区域 D 分为两部分，D_i 和 D_e。我们将先找出人工边界 Σ_R 上的人工边界条件，这样可将问题 (3.4.1)~(3.4.4) 简化为一个有界区域上的初边值问题。为此，在区域 D_e 上考虑问题 (3.4.1)~(3.4.4) 的解。在球坐标下我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}=&\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)\\&+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2},\quad (r,\theta,\phi,t)\in D_e,\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

$$u|_{r=R}=u(R,\theta,\phi,t), \tag{3.4.6}$$

$$u|_{t=0}=0, \tag{3.4.7}$$

$$u\to 0,\quad \text{当}\ r\to\infty \tag{3.4.8}$$

令：

$$\begin{aligned}u(r,\theta,\phi,t)=&\frac{u_{00}(r,t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{u_{n0}(r,t)}{2}P_n^0(\cos\theta)\\&+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(u_{nm}(r,t)\cos m\phi+v_{nm}(r,t)\sin m\phi\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

将其代入 (3.4.5) 可得：

1. $u_{00}(r,t)$ 满足：

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_{00}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u_{00}}{\partial r},\qquad r>R,\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.4.10}$$

$$u_{00}|_{r=R}=a_{00}(t), \tag{3.4.11}$$

$$u_{00}|_{t=0}=0,\quad r>R, \tag{3.4.12}$$

$$u_{00}\to 0,\quad \text{当}\ r\to\infty. \tag{3.4.13}$$

2. $u_{nm}(r,t)$ (或者 $v_{nm}(r,t)$) 是下面的初边值问题的解：

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial G}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}G,\quad r>R,\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.4.14}$$

$$G|_{r=R}=a_{nm}(t)(\text{ 或者}b_{nm}(t)), \tag{3.4.15}$$

$$G|_{t=0}=0,\quad r>R, \tag{3.4.16}$$

$$G\to 0,\ \text{当}\ r\to\infty. \tag{3.4.17}$$

其中 $P_n^m(\cos\theta)$, $n=1,2,\cdots$, $m=1,2,\cdots,n$, 是 Legendre 函数，$a_{00}(t), a_{nm}(t)$, $b_{nm}(t)$ 是 $u(R,\theta,\phi,t)$ 的 Fourier 系数：

$$\begin{aligned}u(R,\theta,\phi,t)=&\frac{a_{00}(r,t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{a_{n0}(r,t)}{2}P_n^0(\cos\theta)\\&+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(a_{nm}(r,t)\cos m\phi+b_{nm}(r,t)\sin m\phi\right)\Big\},\\a_{nm}(t)=&\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\\&\cdot u(R,\xi,\psi,t)P_n^m(\cos\xi)\cos m\psi\sin\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\psi,\\b_{nm}(t)=&\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\\&\cdot u(R,\xi,\psi,t)P_n^m(\cos\xi)\sin m\psi\sin\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\psi.\end{aligned}$$

对于函数 $u_{00}(r,t)$, 我们得到 (Han and Huang, 2002-A)：

$$u_{00}(r,t)=\frac{2R}{r\sqrt{\pi}}\int_{\frac{r-R}{2\sqrt{t}}}^{\infty}a_{00}\Big(t-\frac{(r-R)^2}{4\mu^2}\Big)\mathrm{e}^{-\mu^2}\mathrm{d}\mu, \tag{3.4.18}$$

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial r}(R,t)=-\frac{1}{R}u_{00}|_{r=R}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial a_{00}(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda. \tag{3.4.19}$$

为了求出初边值问题 (3.4.14)~(3.4.17) 的解，首先我们考虑下面的简化的问题：

$$\frac{\partial G_n}{\partial t}=\frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r^2}G_n,\quad r>R,\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.4.20}$$

$$G_n|_{r=R}=1, \tag{3.4.21}$$

$$G_n|_{t=0}=0,\quad r>R, \tag{3.4.22}$$

$$G_n\to 0,\quad \text{当}\ r\to\infty. \tag{3.4.23}$$

令：

$$G_n(r,t)=\mathrm{e}^{-\mu^2 t}w(r).$$

将上式代入 (3.4.20) 我们得到 $w(r)$ 所满足的方程：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\left(\mu^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)w=0. \tag{3.4.24}$$

方程 (3.4.24) 有两个线性独立的解：

$$w_1(\mu r)=\sqrt{\frac{\pi}{2\mu r}}J_{n+1/2}(\mu r),\quad w_2(\mu r)=\sqrt{\frac{\pi}{2\mu r}}Y_{n+1/2}(\mu r).$$

记：

$$G_*(r,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu^2 t}\frac{w_1(\mu r)w_2(\mu R)-w_1(\mu R)w_2(\mu r)}{w_1^2(\mu R)+w_2^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}.$$

直接验证可知 $G_*(r,t)$ 满足方程 (3.4.20)。并且，

$$\begin{aligned}
G_*(r,t)|_{r=R}=&0,\\
G_*(r,t)|_{t=0}=&\lim_{t\to+0}G_*(r,t)\\
=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mu^2 t}\frac{w_1(\mu r)w_2(\mu R)-w_1(\mu R)w_2(\mu r)}{w_1^2(\mu R)+w_2^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\\
=&\frac{2}{\pi}\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}\\
&\cdot\frac{J_{n+1/2}(\mu r)Y_{n+1/2}(\mu R)-Y_{n+1/2}(\mu r)J_{n+1/2}(\mu R)}{J_{n+1/2}^2(\mu R)+Y_{n+1/2}^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\\
=&-\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1},\quad r>R.
\end{aligned}$$

其中最后的等式可以在参考文献 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980, P. 679) 中找到。令：

$$G_n(r,t)=\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}+G_*(r,t),$$

则 $G_n(r,t)$ 是 (3.4.20)~(3.4.23) 的解。由 Duhamel 原理我们得到：

$$\begin{aligned}
u_{nm}(r,t)=&\int_0^t a_{nm}(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
=&-\int_0^t a_{nm}(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
=&-a_{nm}(\lambda)G_n(r,t-\lambda)|_{\lambda=0}^{\lambda=t}+\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
=&\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned} \tag{3.4.25}$$

类似地我们有：

$$v_{nm}(r,t)=\int_0^t \frac{\mathrm{d}b_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda. \tag{3.4.26}$$

$u_{nm}(r,t)$ 和 $v_{nm}(r,t)$ 是 (3.4.14)~(3.4.17) 的解。进一步我们有：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u_{nm}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R}=&\left.\int_0^t \frac{\mathrm{d}a_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial G_n(r,t-\lambda)}{\partial r}\mathrm{d}\lambda\right|_{r=R}\\ =&-\frac{n+1}{R}a_{nm}(t)-\frac{4}{\pi^2 R}\int_0^t \frac{\mathrm{d}b_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\\ &\cdot\left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mu^2(t-\lambda)}\mathrm{d}\mu}{\mu[J_{n+1/2}^2(\mu R)+Y_{n+1/2}^2(\mu R)]}\right]\mathrm{d}\lambda\end{aligned} \tag{3.4.27}$$

另一方面我们有：

$$\begin{aligned}&\frac{4\sqrt{t}}{\pi^2 R}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mu^2 t}}{\mu[J_{n+1/2}^2(\mu R)+Y_{n+1/2}^2(\mu R)]}\mathrm{d}\mu\\ =&\frac{4\sqrt{t}}{\pi^2 R}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi^2 t/R^2}}{J_{n+1/2}^2(\xi)+Y_{n+1/2}^2(\xi)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\\ \equiv& H_{n+1/2}(t/R^2).\end{aligned} \tag{3.4.28}$$

综合 (3.4.27) 和 (3.4.28) 我们得到：

$$\left.\frac{\partial u_{nm}}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{n+1}{R}a_{nm}(t)-\int_0^t \frac{\mathrm{d}a_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda. \tag{3.4.29}$$

类似地我们可以得到：

$$\left.\frac{\partial v_{nm}}{\partial r}\right|_{r=R}=-\frac{n+1}{R}b_{nm}(t)-\int_0^t \frac{\mathrm{d}b_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda. \tag{3.4.30}$$

由等式 (3.4.12) 我们得到人工边界 Σ_R 上的边界条件：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b}=&\frac{1}{2}\left.\frac{\partial u_{00}}{\partial r}\right|_{r=R}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial u_{n0}}{\partial r}P_n^0(\cos\theta)\right.\\ &\left.\left.+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(\frac{\partial u_{nm}}{\partial r}\cos m\phi+\frac{\partial v_{nm}}{\partial r}\sin m\phi\right)\right]\right|_{r=R}\\ =&-\frac{1}{2R}a_{00}(t)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial a_{00}(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left[-\frac{n+1}{R}a_{n0}(t)-\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_{n0}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{b^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right]\right.\\
&\cdot P_n^0(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}\left[-\frac{n+1}{b}\left(a_{nm}(t)\cos m\phi+b_{nm}(t)\sin m\phi\right)\right.\\
&-\int_0^t\left(\frac{\mathrm{d}a_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\cos m\phi+\frac{\mathrm{d}b_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\sin m\phi\right)\\
&\left.\left.\cdot\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right]P_n^m(\cos\theta)\right\}\\
\equiv\;&\Phi_\infty\left(u|_\Sigma,\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_\Sigma\right).
\end{aligned}
\tag{3.4.31}
$$

利用 Legendre 函数的加法定理 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980)：

$$
\begin{aligned}
P_n(\cos\gamma)=\;&P_n^0(\cos\xi)P_n^0(\cos\theta)\\
&+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\xi)P_n^m(\cos\theta)\cos m(\psi-\varphi),
\end{aligned}
$$

其中 $P_n(t)=P_n^0(t)$，

$$
\cos\gamma=\cos\xi\cos\theta+\sin\xi\sin\theta\cos(\psi-\varphi),
$$

可将 (3.4.31) 简化为：

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b}=&-\frac{1}{4\pi R}\int_{\Sigma_R}u(R,\xi,\psi,t)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\\
&-\frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^t\int_{\Sigma_R}\frac{\partial u(b,\xi,\psi,\lambda)}{\partial\lambda}\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\
&-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_{\Sigma_R}u(R,\xi,\psi,t)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\right.\\
&\left.+\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^t\int_{\Sigma_R}\frac{\partial u(R,\xi,\psi,\lambda)}{\partial\lambda}P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right\}\\
\equiv\;&\Phi_\infty\left(u|_{\Sigma_R},\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma_R}\right).
\end{aligned}
\tag{3.4.32}
$$

边界条件 (3.4.32) 是三维热传导方程外问题 (3.4.1)~(3.4.4) 的解在人工边界 Σ_R 上满足的准确边界条件。利用 (3.4.32) 我们可以将无界区域上的问题 (3.4.1)~(3.4.4) 简化为下面的有界计算区域上的问题：

$$
\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta ux=f(x,t),\quad (x,t)\in D_i, \tag{3.4.33}
$$

$$
u|_\Sigma=g(x,t),\qquad (x,t)\in\Sigma, \tag{3.4.34}
$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \Phi_\infty\left(u|_{\Sigma_R}, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma_R}\right), \tag{3.4.35}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3.4.36}$$

在实际计算中，我们在准确人工边界条件 (3.4.32) 中取无穷级数中的前几项，可得到下面的近似人工边界条件：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} =& -\frac{1}{4\pi R}\int_{\Sigma_R} u(R,\xi,\psi,t)\mathrm{d}S_{\xi,\psi} \\
&-\frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^t\int_{\Sigma_R}\frac{\partial u(b,\xi,\psi,\lambda)}{\partial\lambda}\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda \\
&-\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_{\Sigma_R} u(R,\xi,\psi,t)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\right. \\
&+\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^t\int_{\Sigma_R}\frac{\partial u(R,\xi,\psi,\lambda)}{\partial\lambda}P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi} \\
&\left.\cdot\,\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right\} \\
\equiv& \Phi_N\left(u|_{\Sigma_R}, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma_R}\right).
\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

和近似简化初边值问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t)\in D_i, \tag{3.4.38}$$

$$u|_\Sigma = g(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma, \tag{3.4.39}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \Phi_N\left(u|_{\Sigma_R}, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma_R}\right), \tag{3.4.40}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3.4.41}$$

3.4.2 近似简化初边值问题的稳定性分析

我们考虑下面的近似问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x,t)\in D_i, \tag{3.4.42}$$

$$u|_\Sigma = g(x,t), \qquad (x,t)\in\Sigma, \tag{3.4.43}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \Phi_N\left(u|_{\Sigma_R}, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma_R}\right), \tag{3.4.44}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3.4.45}$$

引理 3.4.1　设 $u(r,\theta,\phi,t)$ 是 (3.4.42)~(3.4.45) 的解，则有：

$$\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi_N\left(u|_{\Sigma_R},\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma_R}\right)u|_{\Sigma_R}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\tau\leqslant 0. \tag{3.4.46}$$

证明　将

$$\begin{aligned}u(R,\theta,\phi,t)=&\frac{a_{00}(r,t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_{n0}(r,t)}{2}P_n^0(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\right.\\&\left.\cdot\Big(a_{nm}(r,t)\cos m\phi+b_{nm}(r,t)\sin m\phi\Big)\right\}\end{aligned} \tag{3.4.47}$$

代入到 (3.4.37) 我们得到：

$$\begin{aligned}&\Phi_N\left(u|_{\Sigma_R},\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Sigma_R}\right)\\\equiv&-\frac{1}{2R}a_{00}(t)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial a_{00}(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\&+\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\left[-\frac{n+1}{R}a_{n0}(t)-\int_0^t\frac{\mathrm{d}a_{n0}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right]P_n^0(\cos\theta)\right.\\&+\sum_{m=1}^{n}\left[-\frac{n+1}{R}\left(a_{nm}(t)\cos m\phi+b_{nm}(t)\sin m\phi\right)\right.\\&-\int_0^t\left(\frac{\mathrm{d}a_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\cos m\phi+\frac{\mathrm{d}b_{nm}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\sin m\phi\right)\\&\left.\left.\cdot\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right]P_n^m(\cos\theta)\right\}\\\equiv&W_0(a_{00})+\sum_{n=1}^{N}\frac{W_n(a_{n0}(t))}{2}P_n^0(\cos\theta)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\{W_n(a_{nm}(t))\cos m\phi\\&+W_n(b_{nm}(t))\sin m\phi\}P_n^m(\cos\theta),\end{aligned} \tag{3.4.48}$$

其中，

$$\begin{aligned}W_0(f(t))&=-\frac{1}{2R}f(t)-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,\\W_n(f(t))&=-\frac{n+1}{R}f(t)-\int_0^t\frac{\mathrm{d}f(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{H_{n+1/2}\left(\frac{t-\lambda}{R^2}\right)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

综合 (3.4.47) 和 (3.4.48) 我们得到：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi_N\Big(u|_{\Sigma_R}, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Sigma_R}\Big) u|_{\Sigma_R} R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\tau \\
=& 2\pi R^2 \int_0^t \Big\{ W_0(a_{00}(t))a_{00}(t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} W_n(a_{n0}(t))a_{n0}(t) \\
&+ \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} \\
&\cdot \{W_n(a_{nm}(t))a_{nm}(t) + W_n(b_{nm}(t))b_{nm}(t)\} \Big\} \mathrm{d}\tau. \qquad (3.4.49)
\end{aligned}
$$

另一方面，对于 $n = 0, 1, \cdots, N$，我们在区域 $\{(x,t) \mid R \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上考虑下面的辅助问题：

$$\frac{\partial G_n}{\partial t} = \frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} G_n, \quad r > R,\ 0 < t \leqslant T, \qquad (3.4.50)$$

$$G_n|_{r=R} = a_{nm}(t), \qquad (3.4.51)$$

$$G_n|_{t=0} = 0, \qquad (3.4.52)$$

$$G_n \to 0,\ \text{当} r \to \infty. \qquad (3.4.53)$$

由 (3.4.29) 我们得到：

$$\frac{\partial G_n}{\partial r}\Big|_{r=R} = W_n(a_{nm}(t)). \qquad (3.4.54)$$

以 $r^2 G_n(r,t)$ 乘以等式 (3.4.50)，在 $[R,\infty] \times [0,t]$ 上分部积分，再利用 (3.4.52)~(3.4.54) 我们得到：

$$
\begin{aligned}
\int_R^{\infty} \frac{|G_n|^2}{2} r^2 \mathrm{d}r =& -\int_0^t R^2 \frac{\partial G_n(R,\tau)}{\partial r} G_n(R,\tau)\mathrm{d}\tau \\
&- \int_0^t \int_R^{\infty} \Big[\Big(r\frac{\partial G_n(r,\tau)}{\partial r}\Big)^2 + n(n+1)G_n^2(r,\tau)\Big] \mathrm{d}r\mathrm{d}\tau. \qquad (3.4.55)
\end{aligned}
$$

即：

$$
\begin{aligned}
&\int_R^{\infty} \frac{|G_n|^2}{2} r^2 \mathrm{d}r + \int_0^t \int_R^{\infty} \Big[r^2\Big(\frac{\partial G_n(r,\tau)}{\partial r}\Big)^2 + n(n+1)G_n^2(r,\tau)\Big] \mathrm{d}r\mathrm{d}\tau \\
=& -\int_0^t R^2 \frac{\partial G_n(R,\tau)}{\partial r} G_n(R,\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (3.4.56)
\end{aligned}
$$

由此得到：

$$\int_0^t \frac{\partial G_n(R,\tau)}{\partial r} G_n(R,\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t W_n(a_{nm}(\tau))a_{nm}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant 0. \tag{3.4.57}$$

类似地可以得到：

$$\int_0^t W_n(b_{nm}(\tau))b_{nm}(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant 0. \tag{3.4.58}$$

综合 (3.4.49)，(3.4.57) 和 (3.4.58) 我们得到引理的证明。 ■

对于近似问题 (3.4.42)~(3.4.45) 我们有下面的稳定性估计：

定理 3.4.1　设 u 是 (3.4.42)~(3.4.45) 的解. 当 $g=0$ 时, 则有下面的稳定性估计：

$$\int_{\Omega_i} |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega_i} |u_0(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.4.59}$$

证明　以 u 乘以方程 (3.4.42)，在 D_i 上分部积分我们得到：

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_i} |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\Omega_i} |u_0(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\Sigma_R} \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{\Sigma_R} u(x,t)|_{\Sigma_R} \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$
$$- \int_0^t \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3.4.60}$$

由引理 3.4.1，我们有：

$$\int_0^t \int_{\Sigma_R} \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{\Sigma_R} u(x,t)|_{\Sigma_R} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

因此，我们有：

$$\int_{\Omega_b} |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega_b} |u_0(x,t)|^2 \mathrm{d}x, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$ ■

由估计式 (3.4.59) 我们得到：

定理 3.4.2　近似问题 (3.4.42)~(3.4.45) 最多只有一个解。 ■

完全类似地我们得到：

定理 3.4.3　简化边值问题 (3.4.33)~(3.4.36) 最多只有一个解。 ■

3.4.3 近似简化边值问题 (3.4.38)~(3.4.41) 的有限元近似

下面我们讨论 (3.4.38)~(3.4.41) 的有限元近似。首先我们引进下面的集合和空间：

$$U = \Big\{w(x,t) \mid t \in [0,T], w(\cdot,t), \frac{\partial w}{\partial t}(\cdot,t) \in H^1(\Omega_i),$$

$$\text{及} w(x,0) = 0, w|_\Gamma = g\Big\},$$

$$V = \left\{v(x) \in H^1(\Omega_i) \mid v|_\Gamma = 0\right\},$$

则边值问题 (3.4.38)~(3.4.41) 等价于变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in U, \text{ 使} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,v) + a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{3.4.61}$$

其中，

$$a(u,v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \nabla v \mathrm{d}x - \int_{\Sigma_R} \Phi_N\Big(u|_{\Sigma_R}, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Sigma_R}\Big) v \mathrm{d}s,$$

$$(u,v) = \int_{\Omega_i} uv\mathrm{d}x,$$

$$(f,v) = \int_{\Omega_i} fv\mathrm{d}x.$$

对于 Ω_i 上的一个给定的有限元剖分，设 $V_h \subset H^1(\Omega_i)$ 是一个给定的有限元子空间，例如对于三线性单元 (假设 Γ 是多面体的表面)，

$$V_h = \left\{p_h(x) \in C^0(\Omega_i), \quad \mid v|_K \in P_1(x)\right\},$$

其中 K 是有限元单元。设 $N_1(x), N_2(x), \cdots, N_M(x)$ 是 V_h 的基函数，令：

$$U_h = \Big\{w_h(x,t) \mid w_h(x,t) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(t) N_i(x)$$

$$\text{及} w_h|_\Gamma = g_h, \alpha_i \in H^1([0,T]), \alpha_i(0) = 0\Big\},$$

$$V_h^0 = \{v(x) \in V_h \mid v|_\Gamma = 0\}.$$

其中 g_h 是 g 的插值函数，则我们得到问题 (3.4.61) 的有限元近似：

$$\begin{cases} \text{找 } u_h \in U_h, \text{ 使} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_h,v_h) + a(u_h,v_h) = (f,v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0. \end{cases} \tag{3.4.62}$$

由变分问题 (3.4.62) 我们得到一个关于 $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_M(t)$ 的常微分方程组的初值问题，解出 $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_M(t)$ 即可得到有限元近似解 u_h。

3.5　无界区域上的 Schrödinger 方程

Schrödinger 方程是物理学中的一个基本方程。Schrödinger 方程已经被广泛地应用于不同的领域，如量子力学、光学等。定义于无界区域上的一维线性 Schrödinger 方程的初值问题由下式给出：

$$
(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \mathrm{i}\psi_t(x,t) = -\dfrac{1}{2}\psi_{xx}(x,t) + V(x,t)\psi(x,t), \\ \qquad\qquad \forall (x,t) \in R^1 \times (0,T], \\ \psi(x,0) = \phi(x), \qquad \forall x \in R^1, \end{cases}
$$

其中 $V(x,t)$ 是定义在 $R^1 \times (0,T]$ 上的实值势函数，$\phi(x)$ 是给定的复初值函数，未知函数 $\psi(x,t)$ 是定义在 $R^1 \times (0,T]$ 上的复值函数。

对于无界区域上的二维或者三维线性 Schrödinger 方程的初值问题，其形式如下：

$$
(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \psi|_{t=0} = \psi^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \psi \to 0, \quad \text{当} \quad ||x|| \to +\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases}
$$

其中 $\psi^0(x)$ 是给定函数，$\psi^0(x)$ 在以 R_0 为半径的圆 (或球) 外为零，即：

$$
\psi_0(x) = 0, \quad \forall |x| \geqslant R_0.
$$

上述二个初边值问题都是定义在无界的区域上。在初值满足一定光滑性的条件下，问题 (I)~(II) 都是适定的。为了应用标准的有限元或有限差分方法来求解这类问题，我们引进人工边界，例如在问题 (II) 中可取人工边界为：

$$
\Sigma_R = \{(x,t) \mid |x| = R, 0 \leqslant t \leqslant T\},
$$

其中 $R > R_0$ 为一正实数。在二维情况下 Σ_R 是以原点为中心，R 为半径的圆周，在三维情况下 Σ_R 是以原点为中心，R 为半径的球面。这样人工边界 Σ_R 将

区域 $D = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 分割为两部分，无界区域 D_e 和有界区域 D_i：

$$D_e = \{(x,t) \mid |x| > R, 0 \leqslant t \leqslant T\},$$

$$D_i = \{(x,t) \mid |x| < R, 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

对给定的问题如果我们能在人工边界 Σ_R 上找出未知函数 $u(x)$ 满足的边界条件或者构造出“合适”的近似人工边界条件，我们可以将定义于无界区域 D 上的初值问题归化为定义于有界计算区域 D_i 上的初边值问题，并在有界区域 D_i 求其数值解。在第 3.6 节，第 3.7 节和第 3.8 节中我们将分别讨论无界区域上的一维、二维和三维线性 Schrödinger 方程的数值解。

3.6 无界区域上的一维线性 Schrödinger 方程

在这一节中我们讨论下面无界区域上的一维线性 Schrödinger 方程的初值问题：

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.6.1}$$

$$\psi(x,0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{3.6.2}$$

3.6.1 简化初边值问题及其差分近似

我们假设 $V(x,t)$ 在一个有界区域 $(x_l, x_r) \times (0,T]$ 外面是实常数，即：

$$V(x,t) = \begin{cases} V_+\,, & x_r \leqslant x < +\infty,\ 0 < t \leqslant T, \\ V_-\,, & -\infty < x \leqslant x_l,\ 0 < t \leqslant T, \end{cases}$$

其中 V_-, V_+ 是两个实数，且 $\phi(x)$ 有紧支集，

$$\mathrm{Supp}\{\phi\} \subset [x_l, x_r].$$

我们引进两个人工边界 $\Sigma_l = \{x = x_l, 0 < t \leqslant T\}$ 和 $\Sigma_r = \{x = x_r, 0 < t \leqslant T\}$，$\Sigma_l$ 和 Σ_r 将 $R^1 \times (0,T]$ 分为三部分：

$$D_l = \{(x,t) \mid\ -\infty < x \leqslant x_l,\ 0 < t \leqslant T\},$$

$$D_r = \{(x,t) \mid\ x_r \leqslant x < +\infty,\ 0 < t \leqslant T\},$$

$$D_i = \{(x,t) \mid\ x_l < x < x_r,\ 0 < t \leqslant T\}.$$

其中有界区域 D_i 将是我们的计算区域。在人工边界 Σ_l 和 Σ_r 上的边界条件由不同的作者独立给出 (Abdallah and Pinaud, 2002; Arnold, 2001)：

$$\frac{\partial\psi(x_l,t)}{\partial x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\psi(x_l,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-\lambda}}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda, \tag{3.6.3}$$

$$\frac{\partial\psi(x_r,t)}{\partial x}=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\psi(x_r,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+\lambda}}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda. \tag{3.6.4}$$

在文献中这些条件也称为透明边界条件 (Transparent Boundary Condition)。其意思可以解释为这些条件对于某些波是透明的，即这些波在此没有反射。利用这些边界条件我们可以得到简化的初边值问题：

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x,t)\psi,\quad \forall(x,t)\in\, D_i, \tag{3.6.5}$$

$$\psi(x,0)=\phi(x),\quad x_l\leqslant x\leqslant x_r, \tag{3.6.6}$$

$$\frac{\partial\psi(x_l,t)}{\partial x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\psi(x_l,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-\lambda}}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.6.7}$$

$$\frac{\partial\psi(x_r,t)}{\partial x}=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\psi(x_r,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+\lambda}}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,\quad 0<t\leqslant T. \tag{3.6.8}$$

下面我们考虑简化初边值问题 (3.6.5)~(3.6.8) 的差分近似。将 $[x_l,x_r]$ 等分为 $\omega_h\equiv\{x_j\mid 0\leqslant j\leqslant M\}$，其中 $x_j=x_l+jh,\ 0\leqslant j\leqslant M$，$h=(x_r-x_l)/M$。取 $\tau=\dfrac{T}{K}$，设 $t_k=k\tau,\ t_{k-\frac{1}{2}}=\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\tau,\ k=0,1,2,\cdots,K$。我们首先引进下面的引理。

引理 3.6.1　设 $f(t)\in C^2[0,t_n]$，$f(0)=0$。令：

$$F(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}vt}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{f(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\lambda}}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda.$$

则我们有：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[F(t_n)+F(t_{n-1})]\\&=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[a_0f^{n-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})f^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v(t_n-t_k)}\right]+O(\tau^{3/2}),\end{aligned}$$

其中，

$$a_k=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}},\qquad f^{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[f(t_k)+f(t_{k+1})\right],\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

证明 由 $f(0)=0$ 我们得到：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \frac{f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs}}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs}\mathrm{d}(-2\sqrt{t-s})\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-2\sqrt{t-s}f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs}|_{s=0}^t+\int_0^t 2\sqrt{t-s}\frac{\mathrm{d}(f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs})}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\right]\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t 2\sqrt{t-s}\frac{\mathrm{d}(f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs})}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s\\
=&\int_0^t \frac{\mathrm{d}(2\sqrt{t-s})}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs})}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\int_0^t \frac{\mathrm{d}(f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs})}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{t-s}}.
\end{aligned}
$$

因此由引理 3.2.1 及等式

$$
\frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{t_n-s}}=a_{n-k} \tag{3.6.9}
$$

我们得到：

$$
\begin{aligned}
F(t_n)=&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}vt_n}\int_0^{t_n}\frac{\mathrm{d}(f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vs})}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{t_n-s}}\\
=&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}vt_n}\sum_{k=1}^n\frac{f(t_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}vt_k}-f(t_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}vt_{k-1}}}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{t_n-s}}+O(\tau^{3/2})\\
=&\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sum_{k=1}^n a_{n-k}\left[f(t_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}v(t_n-t_k)}-f(t_{k-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}v(t_n-t_{k-1})}\right]+O(\tau^{3/2})\\
=&\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[a_0f(t_n)-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})f(t_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}v(t_n-t_k)}\right]+O(\tau^{3/2}).
\end{aligned}
$$

因此有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[F(t_n)+F(t_{n-1})]\\
=&\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left\{\left[a_0f(t_n)-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})f(t_k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v(t_n-t_k)}\right]\right.\\
&\left.+\left[a_0f(t_{n-1})-\sum_{k=1}^{n-2}(a_{n-1-k-1}-a_{n-1-k})f(t_k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v(t_{n-1}-t_k)}\right]\right\}+O(\tau^{3/2})\\
=&\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[a_0f^{n-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})f^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v(t_n-t_k)}\right]+O(\tau^{3/2}).
\end{aligned}
$$

■

以 $\Psi_j(t)$ 表示 $\psi(x,t)$ 在 (x_j,t) 的值，利用 Taylor 展式，由 (3.6.5)~(3.6.8) 我们得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\Psi_0(t)}{\mathrm{d}t} = & -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{\frac{\Psi_1(t)-\Psi_0(t)}{h} \\
& -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{4}+V_- t)\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\Psi_0(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_- s}}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s\Big\} \\
& +V(x_0,t)\Psi_0(t)+R_0(t),\quad 0<t\leqslant T,
\end{aligned}
\tag{3.6.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\Psi_j(t)}{\mathrm{d}t} = & -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h^2}\left[\Psi_{j+1}(t)-2\Psi_j(t)+\Psi_{j-1}(t)\right] \\
& +V(x_j,t)\Psi_j(t)+R_j(t), \\
& 1\leqslant j\leqslant M-1,\quad 0<t\leqslant T,
\end{aligned}
\tag{3.6.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\Psi_M(t)}{\mathrm{d}t} = & -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{4}+V_+ t)\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\Psi_M(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+ s}}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s \\
& -\frac{\Psi_M(t)-\Psi_{M-1}(t)}{h}\Big\}+V(x_M,t)\Psi_M(t)+R_M(t), \\
& 0<t\leqslant T,
\end{aligned}
\tag{3.6.12}
$$

$$
\Psi_j(0)=\phi(x_j),\quad 0\leqslant j\leqslant M,
\tag{3.6.13}
$$

其中，

$$
|R_0(t)|\leqslant ch,\quad |R_M(t)|\leqslant ch;\quad |R_j(t)|\leqslant ch^2,\quad 1\leqslant j\leqslant M-1,
\tag{3.6.14}
$$

在 (3.6.10) 和 (3.6.12) 中应用了下面的等式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi(x_l,t)}{\partial x^2} &= \frac{2}{h}\Big\{\frac{\psi(x_l+h,t)-\psi(x_l,t)}{h}-\frac{\partial\psi(x_l,t)}{\partial x}\Big\}+O(h), \\
\frac{\partial^2\psi(x_r,t)}{\partial x^2} &= \frac{2}{h}\Big\{\frac{\partial\psi(x_r,t)}{\partial x}-\frac{\psi(x_r,t)-\psi(x_r-h,t)}{h}\Big\}+O(h).
\end{aligned}
$$

记：

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_- t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\Psi_0(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_- s}}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s, \\
G(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+ t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t\frac{\Psi_M(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+ s}}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

由 (3.6.10)~(3.6.13) 我们有：

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_0(t_n)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Psi_0(t_{n-1})}{\mathrm{d}t}\right] \\
= & -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{\frac{1}{2}\left[\frac{\Psi_1(t_n)-\Psi_0(t_n)}{h}+\frac{\Psi_1(t_{n-1})-\Psi_0(t_{n-1})}{h}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\cdot \frac{1}{2}\left[F(t_n)+F(t_{n-1})\right]\Big\} \\
&+V(x_0,t_{n-\frac{1}{2}})\cdot \frac{1}{2}\left[\Psi_0(t_n)+\Psi_0(t_{n-1})\right]+O(\tau^2+h),\ 1\leqslant n\leqslant K, \\
&\mathrm{i}\cdot \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_j(t_n)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Psi_j(t_{n-1})}{\mathrm{d}t}\right] \\
=&-\frac{1}{4}\cdot\left\{\frac{1}{h^2}\left[\Psi_{j+1}(t_n)-2\Psi_j(t_n)+\Psi_{j-1}(t_n)\right]\right. \\
&\left.+\frac{1}{h^2}\left[\Psi_{j+1}(t_{n-1})-2\Psi_j(t_{n-1})+\Psi_{j-1}(t_{n-1})\right]\right\}+V(x_j,t_{n-\frac{1}{2}}) \\
&\cdot\frac{1}{2}\left[\Psi_j(t_n)+\Psi_j(t_{n-1})\right]+O(\tau^2+h^2),\ 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant K, \\
&\mathrm{i}\cdot \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}\Psi_M(t_n)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\Psi_M(t_{n-1})}{\mathrm{d}t}\right] \\
=&-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{2}\left[G(t_n)+G(t_{n-1})\right] \\
&-\frac{1}{2}\left[\frac{\Psi_M(t_n)-\Psi_{M-1}(t_n)}{h}+\frac{\Psi_M(t_{n-1})-\Psi_{M-1}(t_{n-1})}{h}\right]\Big\} \\
&+V(x_M,t_{n-\frac{1}{2}})\cdot\frac{1}{2}\left[\Psi_M(t_n)+\Psi_M(t_{n-1})\right]+O(\tau^2+h),\quad 1\leqslant n\leqslant K, \\
&\Psi_j(0)=\phi(x_j),\quad 0\leqslant j\leqslant M.
\end{aligned}
$$

记：

$$
\Psi_j^n=\Psi_j(t_n).
$$

再利用 Taylor 展开式我们得到：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\cdot\frac{\Psi_0^n-\Psi_0^{n-1}}{\tau}=&-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{\frac{\Psi_1^{n-\frac{1}{2}}-\Psi_0^{n-\frac{1}{2}}}{h}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\Big[a_0\Psi_0^{n-\frac{1}{2}} \\
&-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\Psi_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-(t_n-t_k)}\Big]+O(\tau^{3/2})\Big\} \\
&+V(x_0,t_{n-\frac{1}{2}})\Psi_0^{n-\frac{1}{2}}+O(\tau^2+h),\ \ 1\leqslant n\leqslant K,
\end{aligned}
\tag{3.6.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\cdot\frac{\Psi_j^n-\Psi_j^{n-1}}{\tau}=&-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h^2}\left[\Psi_{j+1}^{n-\frac{1}{2}}-2\Psi_j^{n-\frac{1}{2}}+\Psi_{j-1}^{n-\frac{1}{2}}\right] \\
&+V(x_j,t_{n-\frac{1}{2}})\Psi_j^{n-\frac{1}{2}}+O(\tau^2+h^2), \\
&1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant K,
\end{aligned}
\tag{3.6.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\cdot\frac{\Psi_M^n-\Psi_M^{n-1}}{\tau} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\Big[a_0\,\Psi_M^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\,\Psi_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+(t_n-t_k)}\Big] \\
&\quad +O(\tau^{3/2})-\frac{\Psi_M^{n-\frac{1}{2}}-\Psi_{M-1}^{n-\frac{1}{2}}}{h}\Big\}+V(x_M,t_{n-\frac{1}{2}})\,\Psi_M^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad +O(\tau^2+h),\qquad 1\leqslant n\leqslant K, \qquad (3.6.17)
\end{aligned}
$$

$$
\Psi_j^0=\phi(x_j),\qquad 0\leqslant j\leqslant M. \qquad (3.6.18)
$$

由 (3.6.15)~(3.6.18) 我们立刻得到下面的差分格式：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\cdot\frac{\psi_0^n-\psi_0^{n-1}}{\tau} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{\frac{\psi_1^{n-\frac{1}{2}}-\psi_0^{n-\frac{1}{2}}}{h}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\Big[a_0\psi_0^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-(t_n-t_k)}\Big]\Big\} \\
&\quad +V(x_0,t_{n-\frac{1}{2}})\psi_0^{n-\frac{1}{2}},\ 1\leqslant n\leqslant K, \qquad (3.6.19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\cdot\frac{\psi_j^n-\psi_j^{n-1}}{\tau} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h^2}\left[\psi_{j+1}^{n-\frac{1}{2}}-2\psi_j^{n-\frac{1}{2}}+\psi_{j-1}^{n-\frac{1}{2}}\right] \\
&\quad +V(x_j,t_{n-\frac{1}{2}})\psi_j^{n-\frac{1}{2}}, \\
&\quad 1\leqslant j\leqslant M-1,\ 1\leqslant n\leqslant K, \qquad (3.6.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\cdot\frac{\psi_M^n-\psi_M^{n-1}}{\tau} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\Big[a_0\psi_M^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_M^{k-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+(t_n-t_k)}\Big] \\
&\quad -\frac{\psi_M^{n-\frac{1}{2}}-\psi_{M-1}^{n-\frac{1}{2}}}{h}\Big\}+V(x_M,t_{n-\frac{1}{2}})\psi_M^{n-\frac{1}{2}}, \\
&\qquad 1\leqslant n\leqslant K, \qquad (3.6.21)
\end{aligned}
$$

$$
\psi_j^0=\varphi(x_j),\quad 0\leqslant j\leqslant M. \qquad (3.6.22)
$$

3.6.2 差分格式 (3.6.19)~(3.6.22) 的稳定性和收敛性分析

在这一小节中我们讨论差分格式 (3.6.19)~(3.6.22) 的稳定性和收敛性。首先我们引进下面的引理：

引理 3.6.2 (Arnold，1998) 对任意 $T>0$，令 $u(t)\in H^{\frac{1}{4}}(0,T)$ 且其在

$t > T$ 上的延拓 $u(t) = 0$。则

$$\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\int_0^{\infty}\bar{u}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t\frac{u(\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\Big]\mathrm{d}t\right\} \geqslant 0,$$

其中 $\bar{u}$ 表示 u 的复共轭。 ■

为了讨论引理 3.6.2 的离散形式，我们首先证明：

引理 3.6.3 令：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x \notin [0,1). \end{cases}$$

则 $f(x) \in H^{1/4}(R)$。

证明 由 $f(x)$ 的 Fourier 展开式我们有：

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{\sqrt{2\pi}\cdot \mathrm{i}y}.$$

因此我们有：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}(1+y^2)^{1/4}\left|\hat{f}(y)\right|^2\mathrm{d}y \\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}(1+y^2)^{1/4}\frac{4\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2}\mathrm{d}y \\
=&\int_{-1}^{1}(1+y^2)^{1/4}\frac{4\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}\mathrm{d}y + \int_{|y|\geqslant 1}(1+y^2)^{1/4}\frac{4\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2}\mathrm{d}y \\
\leqslant&\int_{-1}^{1}(1+y^2)^{1/4}\mathrm{d}y + \int_{|y|\geqslant 1}(1+y^2)^{1/4}\frac{4}{y^2}\mathrm{d}y < \infty.
\end{aligned}$$

即 $f(x) \in H^{1/4}(R)$。引理证毕。 ■

推论 3.6.1 若

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b), \\ 0, & x \notin [a,b). \end{cases}$$

则 $f(x) \in H^{1/4}(R)$。 ■

引理 3.6.4 对于复数 $u^n, n = 1, 2, \cdots, N$，我们有：

$$\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\cdot\tau\sum_{n=1}^{N}\overline{u^n}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[a_0u^n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})u^k\right]\right\} \geqslant 0,$$

其中 a_k 在引理 3.6.1 中已定义。

证明　定义函数 $u(t)$ 如下：

$$u(t)=\begin{cases} u^n, & t\in[t_{n-1},t_n),\ 1\leqslant n\leqslant N,\\ 0, & t\notin[t_0,t_N). \end{cases}$$

对于 $n=1,2,\cdots,N$，令：

$$f_n(t)=\begin{cases} 1, & t\in[t_{n-1},t_n),\ 1\leqslant n\leqslant N,\\ 0, & t\notin[t_0,t_N). \end{cases}$$

则：

$$u(t)=\sum_{n=1}^{N}u^n f_n(t).$$

由推论 3.6.1，$u\in H^{1/4}(R)$。由分部积分及等式 (3.6.9) 我们有：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\overline{u(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t\frac{u(s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{t_N}\overline{u(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t\frac{u(s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t\\
=&\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\overline{u(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t\frac{u(s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t\\
=&\sum_{n=1}^{N}\overline{u^n}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t\frac{u(s)}{\sqrt{t-s}}\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t\\
=&\sum_{n=1}^{N}\overline{u^n}\Big[\int_0^{t_n}\frac{u(s)}{\sqrt{t_n-s}}\mathrm{d}s-\int_0^{t_{n-1}}\frac{u(s)}{\sqrt{t_{n-1}-s}}\mathrm{d}s\Big]\\
=&\sum_{n=1}^{N}\overline{u^n}\Big[\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{u(s)}{\sqrt{t_n-s}}\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{u(s)}{\sqrt{t_{n-1}-s}}\mathrm{d}s\Big]\\
=&\sum_{n=1}^{N}\overline{u^n}\Big[\sum_{k=1}^{n}u^k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{\sqrt{t_n-s}}\mathrm{d}s-\sum_{k=1}^{n-1}u^k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{1}{\sqrt{t_{n-1}-s}}\mathrm{d}s\Big]\\
=&\sum_{n=1}^{N}\overline{u^n}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\tau}a_{n-k}\,u^k-\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\tau}a_{n-k-1}\,u^k\Big]\\
=&\sqrt{\tau}\sum_{n=1}^{N}\overline{u^n}\Big[a_0\,u^n-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\,u^k\Big].
\end{aligned}$$

应用引理 3.6.2 即得：

$$\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \cdot \tau \sum_{n=1}^{N} \overline{u^n}\ \frac{1}{\sqrt{\tau}}\ \Big[a_0\, u^n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1} - a_{n-k})\, u^k\Big]\Big\}$$

$$= \mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} \cdot \int_0^{\infty} \overline{u(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t \frac{u(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau\Big]\mathrm{d}t\Big\} \geqslant 0. \qquad \blacksquare$$

设 $u \equiv \{u_0, u_1, \cdots, u_M\}$ 和 $v \equiv \{v_0, v_1, \cdots, v_M\}$ 是两个定义在 ω_h 上的复值格点函数，我们引进下面的内积和模：

$$(u, v) = h\Big(\frac{1}{2}\ \overline{u_0}\ v_0 + \sum_{j=1}^{M-1} \overline{u_j}\ v_j + \frac{1}{2}\ \overline{u_M}\ v_M\Big),$$

$$\|u\| = \sqrt{(u, v)},\ \|u\|_\infty = \max_{0 \leqslant j \leqslant M} |u_j|.$$

定理 3.6.1 设 $\{\psi_j^n\}$ 是差分格式 (3.6.19)~(3.6.22) 的解，则有：

$$\|\psi^n\| \leqslant \|\phi\|, \qquad n = 1, 2, \cdots, K.$$

证明 分别以 $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}h\overline{\psi_0^{n-\frac{1}{2}}}$ 乘以 (3.6.19)，$-\mathrm{i}h\overline{\psi_j^{n-\frac{1}{2}}}$ 乘以 (3.6.20)，及 $-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}h\overline{\psi_M^{n-\frac{1}{2}}}$ 乘以 (3.6.21)，然后将各式相加我们得到：

$$\begin{aligned}
&h\Big[\frac{1}{2}\ \overline{\psi_0^{n-\frac{1}{2}}}\frac{\psi_0^n - \psi_0^{n-1}}{\tau} \\
&+ \sum_{j=1}^{M-1} \overline{\psi_j^{n-\frac{1}{2}}}\ \frac{\psi_j^n - \psi_j^{n-1}}{\tau} + \frac{1}{2}\overline{\psi_M^{n-\frac{1}{2}}}\ \frac{\psi_M^n - \psi_M^{n-1}}{\tau}\Big] \\
=& -\frac{\mathrm{i}h}{2} \sum_{j=0}^{M-1} \left|\frac{\psi_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} - \psi_j^{n-\frac{1}{2}}}{h}\right|^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \frac{1}{\sqrt{\tau}}\ \overline{\psi_0^{n-\frac{1}{2}}} \\
&\cdot \Big[a_0\psi_0^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n-k-1} - a_{n-k})\psi_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-(t_n - t_k)}\Big] \\
&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \frac{1}{\sqrt{\tau}}\ \overline{\psi_M^{n-\frac{1}{2}}}\ \Big[a_0\psi_M^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1} \\
&-a_{n-k})\psi_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+(t_n - t_k)}\Big] - \mathrm{i}\ (\psi^{n-\frac{1}{2}}, V(\ \cdot\ , t_{n-\frac{1}{2}})\psi^{n-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

取实部我们得到：

$$\frac{1}{2\tau}\ (\|\psi^n\|^2 - \|\psi^{n-1}\|^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}\,\overline{\psi_0^{n-\frac{1}{2}}}\Big[a_0\psi_0^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-(t_n-t_k)}\Big]\Big\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\overline{\psi_M^{n-\frac{1}{2}}}\Big[a_0\psi_M^{n-\frac{1}{2}} \\
&\quad -\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+(t_n-t_k)}\Big]\Big\} \\
&\quad +\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\left(\psi^{n-\frac{1}{2}}, V(\,\bullet\,, t_{n-\frac{1}{2}})\psi^{n-\frac{1}{2}}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.6.23}
$$

记：

$$
\omega_j = 1,\quad 1 \leqslant j \leqslant M-1,\quad 及\ \omega_0 = \omega_M = \frac{1}{2}.
$$

由

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\left(\psi^{n-\frac{1}{2}}, V(\,\bullet\,, t_{n-\frac{1}{2}})\psi^{n-\frac{1}{2}}\right) \\
&= -\mathrm{i}h\sum_{j=0}^{M}\omega_j V(x_j, t_{n-\frac{1}{2}})\left|\psi_j^{n-\frac{1}{2}}\right|^2 \\
&= -\mathrm{i}h\sum_{j=0}^{M}\omega_j\left[\mathrm{Re}\left(V(x_j, t_{n-\frac{1}{2}})\right) + \mathrm{i}\mathrm{Im}\left(V(x_j, t_{n-\frac{1}{2}})\right)\right]\left|\psi_j^{n-\frac{1}{2}}\right|^2 \\
&= h\sum_{j=0}^{M}\omega_j\mathrm{Im}\left(V(x_j, t_{n-\frac{1}{2}})\right)\left|\psi_j^{n-\frac{1}{2}}\right|^2 \\
&\quad -\mathrm{i}h\sum_{j=0}^{M}\omega_j\mathrm{Re}\left(V(x_j, t_{n-\frac{1}{2}})\right)\left|\psi_j^{n-\frac{1}{2}}\right|^2,
\end{aligned}
$$

我们得到：

$$
\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\left(\psi^{n-\frac{1}{2}}, V(\,\bullet\,, t_{n-\frac{1}{2}})\psi^{n-\frac{1}{2}}\right)\right\} = h\sum_{j=0}^{M}\omega_j\mathrm{Im}\left(V(x_j, t_{n-\frac{1}{2}})\right)\left|\psi_j^{n-\frac{1}{2}}\right|^2.
$$

由假设 $\mathrm{Im}\, V(x,t) \leqslant 0$ 我们得到：

$$
\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\left(\psi^{n-\frac{1}{2}}, V(\,\bullet\,, t_{n-\frac{1}{2}})\psi^{n-\frac{1}{2}}\right)\right\} \leqslant 0.
\tag{3.6.24}
$$

结合 (3.6.23) 和 (3.6.24) 我们得到：

$$
\frac{1}{2\tau}\left(\|\psi^n\|^2 - \|\psi^{n-1}\|^2\right)
$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{\tau}}\ \mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \overline{\psi_0^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{n-\frac{1}{2}}}}\Big[a_0\psi_0^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{n-\frac{1}{2}}}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{k-\frac{1}{2}}}\Big]\Big\}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{\tau}}\ \mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \overline{\psi_M^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{n-\frac{1}{2}}}}\Big[a_0\psi_M^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{n-\frac{1}{2}}}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{k-\frac{1}{2}}}\Big]\Big\}. \tag{3.6.25}$$

在引理 3.6.4 中分别令 $u^n=\psi_0^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{n-\frac{1}{2}}}$ 和 $u^n=\psi_M^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{n-\frac{1}{2}}}$ 我们得到：

$$\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \overline{\psi_0^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{n-\frac{1}{2}}}}\Big[a_0\psi_0^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{n-\frac{1}{2}}}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{k-\frac{1}{2}}}\Big]\Big\}\geqslant 0,$$

及

$$\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\ \overline{\psi_M^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{n-\frac{1}{2}}}}\Big[a_0\psi_M^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{n-\frac{1}{2}}}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})\psi_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{k-\frac{1}{2}}}\Big]\Big\}\geqslant 0.$$

将 (3.6.25) 式对 n 从 1 到 N 求和，再利用以上二式即得引理结果。 ■

由定理 3.6.1 立刻得到：

推论 3.6.2 差分格式 (3.6.19)~(3.6.22) 有唯一解。 ■

下面我们讨论差分格式 (3.6.19)~(3.6.22) 的收敛性。

定理 3.6.2 假设初边值问题 (3.6.5)~(3.6.8) 的解 $\psi(x,t)\in C_{x,t}^{4,3}([x_l,x_r]\times[0,T])$，设 $\{\psi_j^n, 0\leqslant j\leqslant M, 1\leqslant n\leqslant K\}$ 是差分格式 (3.6.19)~(3.6.22) 的解，则有：

$$\|\Psi^n-\psi^n\|\leqslant c\mathrm{e}^{\frac{3T}{5}}\sqrt{\frac{6T}{5}}\ \Big(h^{3/2}+\frac{\tau^{3/2}}{h^{1/2}}+\sqrt{x_r-x_l}(\tau^2+h^2)\Big),\quad 1\leqslant n\leqslant K.$$

其中 c 是一个常数。

证明 令：

$$U_j^n=\Psi_j^n-\psi_j^n.$$

将 (3.6.15)~(3.6.18) 和 (3.6.19)~(3.6.22) 相减，我们得到误差方程：

$$\mathrm{i}\cdot\frac{U_0^n-U_0^{n-1}}{\tau}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{\frac{U_1^{n-\frac{1}{2}}-U_0^{n-\frac{1}{2}}}{h}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\Big[a_0U_0^{n-\frac{1}{2}}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-(t_n-t_k)}\Big]\Big\}$$
$$+V(x_0,t_{n-\frac{1}{2}})U_0^{n-\frac{1}{2}}+P_0^{n-\frac{1}{2}},\quad 1\leqslant n\leqslant K,\tag{3.6.26}$$

$$\mathrm{i}\cdot\frac{U_j^n-U_j^{n-1}}{\tau}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h^2}\Big[U_{j+1}^{n-\frac{1}{2}}-2U_j^{n-\frac{1}{2}}+U_{j-1}^{n-\frac{1}{2}}\Big]$$
$$+V(x_j,t_{n-\frac{1}{2}})U_j^{n-\frac{1}{2}}+P_j^{n-\frac{1}{2}},$$
$$1\leqslant j\leqslant M-1,\quad 1\leqslant n\leqslant K,\tag{3.6.27}$$

$$\mathrm{i}\cdot\frac{U_M^n-U_M^{n-1}}{\tau}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{h}\Big\{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\Big[a_0U_M^{n-\frac{1}{2}}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+(t_n-t_k)}\Big]$$
$$-\frac{U_M^{n-\frac{1}{2}}-U_{M-1}^{n-\frac{1}{2}}}{h}\Big\}+V(x_M,t_{n-\frac{1}{2}})U_M^{n-\frac{1}{2}}+P_M^{n-\frac{1}{2}},$$
$$1\leqslant n\leqslant K,\tag{3.6.28}$$

$$U_j^0=0,\quad 0\leqslant j\leqslant M,\tag{3.6.29}$$

其中,

$$|P_0^{n-\frac{1}{2}}|\leqslant c\Big(h+\frac{\tau^{3/2}}{h}\Big),\ |P_M^{n-\frac{1}{2}}|\leqslant c\Big(h+\frac{\tau^{3/2}}{h}\Big);$$
$$|P_j^{n-\frac{1}{2}}|\leqslant c(h^2+\tau^2),\quad 1\leqslant j\leqslant M-1.\tag{3.6.30}$$

分别以 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}h\overline{U_0^{n-\frac{1}{2}}}$ 乘以 (3.6.26), $-\mathrm{i}h\overline{U_j^{n-\frac{1}{2}}}$ 乘以 (3.6.27), 及 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}h\overline{U_M^{n-\frac{1}{2}}}$ 乘以 (3.6.28), 然后将各式相加我们得到:

$$h\Big[\frac{1}{2}\overline{U_0^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{U_0^n-U_0^{n-1}}{\tau}+\sum_{j=1}^{M-1}\overline{U_j^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{U_j^n-U_j^{n-1}}{\tau}$$
$$+\frac{1}{2}\overline{U_M^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{U_M^n-U_M^{n-1}}{\tau}\Big]$$
$$=-\frac{1}{2}\mathrm{i}h\sum_{j=0}^{M-1}\Big|\frac{U_{j+1}^{n-\frac{1}{2}}-2U_j^{n-\frac{1}{2}}}{h}\Big|^2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\overline{U_0^{n-\frac{1}{2}}}\Big[a_0U_0^{n-\frac{1}{2}}$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-(t_n-t_k)}\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\overline{U_M^{n-\frac{1}{2}}}\Big[a_0U_M^{n-\frac{1}{2}} \\
&-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+(t_n-t_k)}\Big] \\
&-\mathrm{i}\,(U^{n-\frac{1}{2}},V(\,\bullet\,,t_{n-\frac{1}{2}})U^{n-\frac{1}{2}})-\mathrm{i}\,(U^{n-\frac{1}{2}},P^{n-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

取实部我们得到:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\tau}\left(\|U^n\|^2-\|U^{n-1}\|^2\right) \\
=&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\overline{U_0^{n-\frac{1}{2}}}\Big[a_0U_0^{n-\frac{1}{2}} \\
&-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_-(t_n-t_k)}\Big]\Big\} \\
&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\overline{U_M^{n-\frac{1}{2}}}\Big[a_0U_M^{n-\frac{1}{2}} \\
&-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_+(t_n-t_k)}\Big]\Big\} \\
&+\left(U^{n-\frac{1}{2}},\left(\mathrm{Im}V(\,\bullet\,,t_{n-\frac{1}{2}})\right)U^{n-\frac{1}{2}}\right)+\mathrm{Im}\left(U^{n-\frac{1}{2}},P^{n-\frac{1}{2}}\right) \\
\leqslant&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\overline{U_0^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{n-\frac{1}{2}}}}\Big[a_0U_0^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{n-\frac{1}{2}}} \\
&-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_0^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_-t_{k-\frac{1}{2}}}\Big]\Big\} \\
&-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\,\overline{U_M^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{n-\frac{1}{2}}}}\Big[a_0U_M^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{n-\frac{1}{2}}} \\
&-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n-k-1}-a_{n-k})U_M^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_+t_{k-\frac{1}{2}}}\Big]\Big\} \\
&+\frac{1}{2}\left(\|U^{n-\frac{1}{2}}\|^2+\|P^{n-\frac{1}{2}}\|^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.6.31}
$$

将 (3.6.31) 式对 n 从 1 到 N 求和，再利用引理 3.6.4 我们得到:

$$
\begin{aligned}
\|U^n\|^2\leqslant&\|U^0\|^2+\frac{1}{2}\tau\sum_{k=1}^{n}\left(\|u^k\|^2+\|u^{k-1}\|^2\right) \\
&+\tau\sum_{k=1}^{n}\|P^{k-\frac{1}{2}}\|^2,\ n=1,2,\cdots.
\end{aligned}
\tag{3.6.32}
$$

当 $\tau \leqslant 1/3$ 时，$1/(1-\tau/2) \leqslant 6/5$，则 (3.6.32) 可简化为：

$$\|U^n\|^2 \leqslant \frac{6}{5}\Big(\|U^0\|^2 + \tau\sum_{k=1}^{n-1}\|u^k\|^2 + \tau\sum_{k=1}^{n}\|P^{k-\frac{1}{2}}\|^2\Big),\ n=1,2,\cdots. \tag{3.6.33}$$

应用离散的 Gronwall 不等式我们得到：

$$\|U^n\|^2 \leqslant \frac{6}{5}\mathrm{e}^{\frac{6}{5}n\tau}\Big(\|U^0\|^2 + \tau\sum_{k=1}^{n}\|P^{k-\frac{1}{2}}\|^2\Big),\ n=1,2,\cdots. \tag{3.6.34}$$

由 (3.6.29) 我们有 $\|U^0\|=0$，由 (3.6.30) 可得：

$$\|P^{k-\frac{1}{2}}\|^2 \leqslant ch\Big(h+\frac{\tau^{3/2}}{h}\Big)^2 + c(M-1)h(\tau^2+h^2)^2. \tag{3.6.35}$$

由 (3.6.34) 和 (3.6.35) 即得定理结果。 ■

3.7　二维线性 Schrödinger 方程外问题的整体边界条件

在这一节中我们讨论无界区域上的二维线性 Schrödinger 方程的初值问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi,\quad x\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3.7.1}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi^0(x),\quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{3.7.2}$$

$$\psi\to 0,\quad \text{当 } |x|\to+\infty,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.7.3}$$

以下我们假设实函数 $V(x,t)$ 在一个半径为 R_0 的圆 $B_0=\{x\mid \|x\|<R_0\}$ 外为常数，即：

$$V(x,t)=V_\infty,\quad \text{当}\quad |x|\geqslant R_0,$$

并且假设 $\psi^0(x)$ 的支集有界且 $\mathrm{supp}\,\{\psi^0(x)\}\subset B_0$。

3.7.1　人工边界 Σ_R 上的准确边界条件和近似人工边界条件

首先我们引进人工边界 $\Sigma_R=\{(x,t)\mid |x|=R,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 将 $\mathbb{R}^2\times(0,T]$ 分为两部分：有界部分 $D_i=\{(x,t)\mid |x|<R,\ 0<t\leqslant T\}\equiv\Omega_i\times(0,T]$ 及无界部分 $D_e=\{(x,t)\mid |x|>R,\ 0<t\leqslant T\}\equiv\Omega_e\times(0,T]$，则初值问题 (3.7.1)~(3.7.3)

等价于下面两个问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \quad (x,t) \in D_i, \tag{3.7.4}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi^0(x), \tag{3.7.5}$$

和

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V_0\psi, \quad (x,t) \in D_e, \tag{3.7.6}$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \tag{3.7.7}$$

$$\psi \to 0, \quad 当\ |x| \to +\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.7.8}$$

问题 (3.7.4)~(3.7.5) 和问题 (3.7.6)~(3.7.8) 都不能独立求解，它们由人工边界 Σ_R 耦合在一起。下面我们先考虑无界区域 D_e 上的问题 (3.7.6)~(3.7.8)，以找出 Σ_R 上的人工边界条件。假设 $\psi(x,t)$ 是 (3.7.1)~(3.7.3) 的解，其在 D_e 上的限制满足 (3.7.6)~(3.7.8)。如果我们给出 ψ 在 Σ_R 上的值，即：

$$\psi|_{|x|=R} = \psi(R,\theta,t), \tag{3.7.9}$$

则问题 (3.7.6)~(3.7.8) 和 (3.7.9) 是适定的。在极坐标下，(3.7.6)~(3.7.8) 和 (3.7.9) 的解可由 Fourier 级数表示：

$$\psi(r,\theta,t) = \frac{\psi_0(r,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n(r,t)\cos n\theta + \phi_n(r,t)\sin n\theta), \tag{3.7.10}$$

其中，

$$\psi_n(r,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(r,\theta,t)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta, \ n = 0,1,\cdots, \tag{3.7.11}$$

$$\phi_n(r,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(r,\theta,t)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta, \ n = 1,2,\cdots, \tag{3.7.12}$$

以及

$$\psi(R,\theta,t) = \frac{\alpha_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n(t)\cos n\theta + \beta_n(t)\sin n\theta), \tag{3.7.13}$$

其中，

$$\alpha_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(R,\theta,t)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta, \ n = 0,1,\cdots,$$

$$\beta_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(R,\theta,t)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta, \ n = 1,2,\cdots.$$

将 (3.7.10) 代入 (3.7.6)~(3.7.8) 和 (3.7.9)，我们得到 $\psi_n(r,t)(n=0,1,2,\cdots)$ 和 $\phi_n(r,t)(n=1,2,\cdots)$ 所满足的方程和初边值条件：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\psi_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}\psi_n\Big)+V_\infty\psi_n,\quad R<r<\infty,\ 0<t\leqslant T, \tag{3.7.14}$$

$$\psi_n|_{r=R}=\alpha_n(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.7.15}$$

$$\psi_n|_{t=0}=0,\quad R\leqslant r<+\infty, \tag{3.7.16}$$

$$\psi_n\to 0,\ \text{当 } r\to\infty,\ 0<t\leqslant T. \tag{3.7.17}$$

和

$$\mathrm{i}\frac{\partial\phi_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\phi_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}\phi_n\Big)+V_\infty\phi_n,\quad R<r<\infty,\ 0<t\leqslant T, \tag{3.7.18}$$

$$\phi_n|_{r=R}=\beta_n(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.7.19}$$

$$\phi_n|_{t=0}=0,\quad R\leqslant r<+\infty, \tag{3.7.20}$$

$$\phi_n\to 0,\ \text{当 } r\to\infty,\ 0<t\leqslant T. \tag{3.7.21}$$

我们首先讨论问题 (3.7.14)~(3.7.17) 的解，令：

$$\psi_n(r,t)=w_n(r,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_\infty t}, \tag{3.7.22}$$

则 $w_n(r,t)$ 满足：

$$\mathrm{i}\frac{\partial w_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 w_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}w_n\Big),\quad R<r<\infty,\ 0<t\leqslant T, \tag{3.7.23}$$

$$w_n|_{r=R}=\alpha_n(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty t}\ \equiv\ w_n(R,t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.7.24}$$

$$w_n|_{t=0}=0,\quad R\leqslant r<\infty, \tag{3.7.25}$$

$$w_n\to 0,\ \text{当 } r\to+\infty,\quad 0<t\leqslant T. \tag{3.7.26}$$

为了求解问题 (3.7.14)~(3.7.17)，首先考虑下面的简化问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial G_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}G_n\Big),\quad R<r<\infty,0<t\leqslant T, \tag{3.7.27}$$

$$G_n|_{r=R}=1,\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.7.28}$$

$$G_n|_{t=0}=0,\quad R\leqslant r<+\infty, \tag{3.7.29}$$

$$G_n\to 0,\ \text{当 } r\to\infty,\ 0<t\leqslant T. \tag{3.7.30}$$

令：

$$G_n(r,t) = U(r)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}, \tag{3.7.31}$$

将其代入方程 (3.7.27)，我们得到 $U(r)$ 所满足的方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)U = 0. \tag{3.7.32}$$

方程 (3.7.32) 是 n 阶 Bessel 方程，其两个线性独立的解是 $J_n(\mu r)$ 和 $Y_n(\mu r)$。因此，对于任何给定的 $\mu > 0$，

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}\frac{J_n(\mu r)Y_n(\mu R) - Y_n(\mu r)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R) + Y_n^2(\mu R)}$$

是方程 (3.7.27) 的一个解。令：

$$G_*(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}\frac{J_n(\mu r)Y_n(\mu R) - Y_n(\mu r)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R) + Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}. \tag{3.7.33}$$

则 $G_*(r,t)$ 是方程 (3.7.27) 的一个解并且

$$\begin{aligned}
&G_*(r,t)|_{r=R} = 0,\\
&G_*(r,t)|_{t=0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{J_n(\mu r)Y_n(\mu R) - Y_n(\mu r)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R) + Y_n^2(\mu)R}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\left(\frac{R}{r}\right)^n,
\end{aligned}$$

其中最后的等式来自参考文献 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980, P. 679)。令：

$$G_n(r,t) = \left(\frac{R}{r}\right)^n + G_*(r,t), \tag{3.7.34}$$

则 $G_n(r,t)$ 是问题 (3.7.27)~(3.7.30) 的解。由 Duhamel 原理我们得到：

$$\begin{aligned}
w_n(r,t) &= \int_0^t w_n(R,\lambda)\frac{\partial G_n(r,t-\lambda)}{\partial t}\mathrm{d}\lambda\\
&= -\int_0^t w_n(R,\lambda)\frac{\partial G_n(r,t-\lambda)}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda\\
&= -\{w_n(R,\lambda)G_n(r,t-\lambda)\}\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=t} + \int_0^t \frac{\partial w_n(R,\lambda)}{\partial \lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\
&= \int_0^t \frac{\partial w_n(R,\lambda)}{\partial \lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

因此我们得到问题 (3.7.14)~(3.7.17) 和问题 (3.7.18)~(3.7.21) 的解：

$$\psi_n(r,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_\infty t}\int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\alpha_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty \lambda}\right)G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda,\ n = 0, 1, \cdots,$$

$$\phi_n(r,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_\infty t}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\beta_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda}\right)G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda,\ n=1,2,\cdots,$$

进一步我们有：

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\alpha_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right) \cdot \frac{\partial G_n}{\partial r}(R,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda,\ n=0,1,\cdots, \tag{3.7.35}$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\beta_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right) \cdot \frac{\partial G_n}{\partial r}(R,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda,\ n=1,2,\cdots. \tag{3.7.36}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_n}{\partial r}(r,t)\bigg|_{r=R} &= -\frac{n}{R} + \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t} \cdot \frac{J_n'(\mu R)Y_n(\mu R) - Y_n'(\mu R)J_n(\mu R)}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\mathrm{d}\mu \\ &= -\frac{n}{R} - \frac{4}{\pi^2 R}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu},\end{aligned}$$

其中最后的等式由 Wronskian 关系式

$$J_n'(\mu R)Y_n(\mu R) - Y_n'(\mu R)J_n(\mu R) = -\frac{2}{\pi\mu R}$$

得到。令：

$$S_n(t) = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}, \tag{3.7.37}$$

则有：

$$\frac{\partial G_n(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\frac{n}{R} - \frac{S_n(t)}{R\sqrt{\pi t}}. \tag{3.7.38}$$

将 (3.7.38) 代入 (3.7.35)~(3.7.36) 即得：

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\frac{n}{R}\alpha_n(t) - \frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\alpha_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)\frac{S_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda, \tag{3.7.39}$$

$$\frac{\partial\phi_n}{\partial r}\bigg|_{r=R} = -\frac{n}{R}\beta_n(t) - \frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\beta_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)\frac{S_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda, \tag{3.7.40}$$

最后由 ψ 的 Fourier 展开式 (3.7.10) 我们得到：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\Big|_{r=R} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\partial\psi_n}{\partial r}\Big|_{r=R}\cos n\theta + \frac{\partial\phi_n}{\partial r}\Big|_{r=R}\sin n\theta\Big) \\
&= -\frac{1}{2R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\psi(R,\xi,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\Big)\frac{S_0(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda \\
&\quad -\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{n}{R\pi}\int_0^{2\pi}\psi(R,\xi,t)\cos n(\xi-\theta)\mathrm{d}\xi \\
&\quad +\frac{1}{R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(\psi(R,\xi,\lambda)\cos n(\theta-\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\Big) \\
&\quad \cdot\frac{S_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\Big\} \\
&\equiv \Lambda_\infty\big(\psi|_{|x|=R},\theta,t\big).
\end{aligned} \tag{3.7.41}$$

边界条件 (3.7.41) 是问题 (3.7.4)~(3.7.5) 的解在人工边界 Σ_R 上满足的准确边界条件。利用 (3.7.41) 我们可以将无界问题 (3.7.1)~(3.7.3) 简化为下面的有界计算区域上的问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \quad (x,t)\in D_i, \tag{3.7.42}$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi^0(x), \tag{3.7.43}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{|x|=R} = \Lambda_\infty\big(\psi|_{|x|=R},\theta,t\big), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{3.7.44}$$

实际计算中，在准确边界条件 (3.7.41) 的无穷级数中取前几项，可得到下面的近似人工边界条件：

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{|x|=R} = \Lambda_N\big(\psi|_{|x|=R},\theta,t\big). \tag{3.7.45}$$

3.7.2 近似简化初边值问题的稳定性分析

在这一小节中我们讨论下面的近似简化初边值问题的稳定性：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \quad (x,t)\in D_i, \tag{3.7.46}$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi^0(x), \tag{3.7.47}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{|x|=R} = \Lambda_N\big(\psi|_{|x|=R},\theta,t\big), \tag{3.7.48}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&\Lambda_N\left(\psi|_{|x|=R}, \theta, t\right)\\
=&-\frac{1}{2\sqrt{R\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\psi(R,\xi,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)\frac{S_0(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\\
&-\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{n}{R\pi}\int_0^{2\pi}\psi(R,\xi,t)\cos n(\xi-\theta)\mathrm{d}\xi\right.\\
&+\frac{1}{\sqrt{R\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\psi(R,\xi,\lambda)\cos n(\xi-\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)\\
&\left.\cdot\frac{S_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\lambda\right\}.
\end{aligned}\tag{3.7.49}$$

首先我们有下面的引理：

引理 3.7.1 假设 $\psi(r,\theta,t)$ 是初边值问题 (3.7.46)~(3.7.48) 的解，则有：

$$\operatorname{Im}\left\{\int_0^t\int_0^{2\pi}\Lambda_N\left(\psi|_{|x|=R},\theta,\tau\right)\overline{\psi}(R,\theta,\tau)R\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\tau\right\}\geqslant 0,\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{3.7.50}$$

证明 将

$$\psi(R,\theta,t)=\frac{\alpha_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n(t)\cos n\theta+\beta_n(t)\sin n\theta\right).\tag{3.7.51}$$

代入 (3.7.49) 式我们得到：

$$\begin{aligned}
&\Lambda_N\left(\psi|_{|x|=R},\theta,t\right)\\
=&-\frac{1}{2R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\alpha_0(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)\frac{S_0(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\
&-\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\frac{n}{R}\alpha_n(t)+\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\alpha_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)\frac{S_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right]\cos n\theta\right.\\
&\left.+\left[\frac{n}{R}\beta_n(t)+\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\beta_n(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)\frac{S_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\right]\sin n\theta\right\}.\\
\equiv&\frac{W_0(\alpha_0;t)}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left\{W_n(\alpha_n;t)\cos n\theta+W_n(\beta_n;t)\sin n\theta\right\},
\end{aligned}\tag{3.7.52}$$

其中，

$$W_n(f;t)=-\frac{n}{R}f(t)-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(f(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\right)$$

$$\cdot \frac{S_n(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda, \quad n=0,1,\cdots,N.$$

由 (3.7.51) 和 (3.7.52) 我们得到：

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^{2\pi}\Lambda_N\big(\psi|_{|x|=R},\theta,\tau\big)\overline{\psi}(R,\theta,\tau)R\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau\\=&\pi R\int_0^t\Big\{\frac{W_0(\alpha_0;\tau)\overline{\alpha_0(\tau)}}{2}\\&+\sum_{n=1}^N\Big[W_n(\alpha_n;\tau)\overline{\alpha_n(\tau)}+W_n(\beta_{n,R};\tau)\overline{\beta_{n,R}(\tau)}\Big]\Big\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{3.7.53}$$

另一方面，对于 $n=0,1,\cdots,N$ 我们在区域 D_i 上考虑下面的辅助问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial P_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2P_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}P_n\Big)+V_\infty P_n,$$
$$R<r<\infty,\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.7.54}$$

$$P_n|_{r=R}=\alpha_n(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{3.7.55}$$

$$P_n|_{t=0}=0,\quad R\leqslant r<+\infty, \tag{3.7.56}$$

$$P_n\longrightarrow 0,\quad 当\quad r\longrightarrow\infty,\ 0<t\leqslant T. \tag{3.7.57}$$

问题 (3.7.54)~(3.7.57) 已在 3.6 节中讨论过，由 (3.7.40) 我们得到：

$$\frac{\partial P_n}{\partial r}\Big|_{r=R}=W_n(\alpha_n;t). \tag{3.7.58}$$

以 $r\overline{P_n(r,t)}$ 乘以方程 (3.7.54) 两端，取共轭，我们得到：

$$\mathrm{i}r\overline{P}_n\frac{\partial P_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial P_n}{\partial r}\Big)\overline{P}_n-\frac{n^2}{r}P_n\overline{P}_n\Big)+rV_\infty P_n\overline{P}_n, \tag{3.7.59}$$

$$-\mathrm{i}rP_n\frac{\partial\overline{P}_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\overline{P}_n}{\partial r}\Big)P_n-\frac{n^2}{r}P_n\overline{P}_n\Big)+rV_\infty P_n\overline{P}_n. \tag{3.7.60}$$

结合 (3.7.54)~(3.7.57) 得到：

$$\mathrm{i}r\frac{\partial}{\partial t}|P_n(r,t)|^2=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial P_n}{\partial r}\Big)\overline{P}_n+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\overline{P}_n}{\partial r}\Big)P_n. \tag{3.7.61}$$

对 (3.7.61) 在 $[R,+\infty)\times[0,t]$ 上积分，利用 (3.7.56)，我们得到：

$$\mathrm{i}\int_R^{+\infty}|P_n(r,t)|^2r\mathrm{d}r=\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\Big\{R\int_0^t\frac{\partial P_n(R,\tau)}{\partial r}\overline{P}_n(R,\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}.$$

即：

$$0 \leqslant \operatorname{Im} \int_0^t \frac{\partial P_n(R,\tau)}{\partial r} \overline{P}_n(R,\tau) \mathrm{d}\tau = \operatorname{Im} \int_0^t W_n(\alpha_n;\tau) \overline{\alpha_n(\tau)} \mathrm{d}\tau. \tag{3.7.62}$$

类似地我们可以证明：

$$0 \leqslant \operatorname{Im} \int_0^t W_n(\beta_n;\tau) \overline{\beta_n(\tau)} \mathrm{d}\tau. \tag{3.7.63}$$

最后，由 (3.7.53)，(3.7.62) 和 (3.7.63) 即得引理结果。 ■

利用引理 3.7.1，我们可得下面的稳定性估计：

定理 3.7.1　设 ψ 是 (3.7.46)~(3.7.48) 的解，则有下面的稳定性估计：

$$\int_{\Omega_i} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{\Omega_i} |\psi^0(x)|^2 \mathrm{d}x, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.7.64}$$

证明　以 $\overline{\psi}$ 乘以方程 (3.7.46) 两端，取共轭，我们得到：

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t}\overline{\psi} &= -\frac{1}{2}\overline{\psi}\Delta\psi + V(x,t)\psi\overline{\psi}, \\ -\mathrm{i}\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial t}\psi &= -\frac{1}{2}\psi\Delta\overline{\psi} + V(x,t)\overline{\psi}\psi. \end{aligned}$$

由此我们得到：

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = -\frac{1}{2}\overline{\psi}\Delta\psi + \frac{1}{2}\psi\Delta\overline{\psi}, \quad (x,t) \in \Omega_i \times [0,T]. \tag{3.7.65}$$

对 (3.7.65) 在 $\Omega_i \times [0,t]$ 上积分，分部积分，我们得到：

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = &\int_{\Omega_i} |\psi^0(x)|^2 \mathrm{d}x \\ &- \operatorname{Im}\left\{ \int_0^t \int_0^{2\pi} \Lambda_N(\psi|_{|x|=R}, \theta, \tau) \overline{\psi(x,\tau)}|_{|x|=R} R \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\tau \right\}. \end{aligned}$$

则由引理 3.7.1，我们即得不等式 (3.7.64)。 ■

由稳定性估计 (3.7.64) 我们立刻得到：近似简化初边值问题 (3.4.46)~(3.4.48) 最多只有一个解。

3.8　三维线性 Schrödinger 的整体边界条件

在这一节中我们讨论无界区域上的三维线性 Schrödinger 方程的初值问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.8.1}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.8.2}$$

$$\psi \to 0, \quad \text{当}\ |x| \to +\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.8.3}$$

以下我们假设实函数 $V(x,t)$ 在一个半径为 R_0 的球 $B_0 = \{x \mid |x| < R_0\}$ 外为常数，即：

$$V(x,t) = V_\infty, \quad \text{当}\ |x| \geqslant R_0,$$

并且假设 $\psi^0(x)$ 的支集有界且 $\mathrm{supp}\{\psi^0(x)\} \subset B_0$。

3.8.1 人工边界 Σ_R 上的准确边界条件和近似人工边界条件

首先我们引进人工边界 $\Sigma_R = \{\ (x,t) \mid |x| = R,\ 0 \leqslant t \leqslant T\ \}$ 将 $\mathbb{R}^3 \times [0,T]$ 分为两部分：有界部分 $D_i = \{(x,t) \mid |x| \leqslant R,\ 0 \leqslant t \leqslant T\ \} \equiv \Omega_i \times [0,T]$ 及无界部分 $D_e = \{(x,t) \mid |x| > R,\ 0 \leqslant t \leqslant T\ \} \equiv \Omega_e \times [0,T]$，则初值问题 (3.8.1)~(3.8.3) 等价于下面两个问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi, \quad (x,t) \in D_i,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.8.4}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi^0(x), \quad x \in \Omega_i, \tag{3.8.5}$$

和

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V_\infty\psi, \quad x \in D_e,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.8.6}$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \qquad x \in \Omega_e, \tag{3.8.7}$$

$$\psi \to 0, \quad \text{当}\ |x| \to +\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.8.8}$$

问题 (3.8.4)~(3.8.5) 和问题 (3.8.6)~(3.8.8) 都不能独立求解，它们由人工边界 Σ_R 耦合在一起。下面我们先考虑无界区域 D_e 上的问题 (3.8.6)~(3.8.8)，以找出在 Σ_R 上的人工边界条件。假设 $\psi(x,t)$ 是 (3.8.1)~(3.8.3) 的解，则 $\psi(x,t)$ 在 D_e 上的限制满足：

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = &-\frac{1}{2r^2}\Big\{\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big) \\ &+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\Big\} + V_\infty\psi, (r,\theta,\varphi,t) \in D_e,\end{aligned} \tag{3.8.9}$$

$$\psi|_{r=R} = \psi(R,\theta,\varphi,t), \tag{3.8.10}$$

$$\psi|_{t=0} = 0, \tag{3.8.11}$$

$$\psi \to 0, \quad \text{当}\ r \to +\infty. \tag{3.8.12}$$

令:

$$\psi(R,\theta,\varphi,t)=\frac{a_{00}(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{a_{n0}(t)}{2}P_n^0(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\cdot\Big(a_{nm}(t)\cos m\varphi+b_{nm}(t)\sin m\varphi\Big)\Big\},\tag{3.8.13}$$

其中 $P_n^m(\cos\theta)$, $(n=1,2,\cdots;m=1,2,\cdots,n)$ 是 Legendre 函数,

$$\begin{aligned}a_{nm}(t)&=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(R,\xi,\eta,t)\cdot P_n^m(\cos\xi)\cos m\eta\sin\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\\&\equiv\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\int_{\Gamma_1}\psi(R,\xi,\eta,t)\cdot P_n^m(\cos\xi)\cos m\eta ds_{\xi,\eta},\end{aligned}\tag{3.8.14}$$

$$\begin{aligned}b_{nm}(t)&=\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(R,\xi,\eta,t)\cdot P_n^m(\cos\xi)\sin m\eta\sin\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.\\&\equiv\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!}\int_{\Gamma_1}\psi(R,\xi,\eta,t)\cdot P_n^m(\cos\xi)\sin m\eta\mathrm{d}s_{\xi,\eta}.\end{aligned}\tag{3.8.15}$$

假设 (3.8.9)~(3.8.12) 的解 $\psi(r,\theta,\varphi,t)$ 有下面的形式:

$$\psi(r,\theta,\varphi,t)=\frac{\psi_{00}(r,t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{\psi_{n0}(r,t)}{2}P_n^0(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\Big(\psi_{nm}(r,t)\cos m\varphi+\phi_{nm}(r,t)\sin m\varphi\Big)\Big\}.\tag{3.8.16}$$

将 (3.8.16) 式代入 (3.8.9) 式我们得到:

1. $\psi_{00}(r,t)$ 是下面的初边值问题的解:

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi_{00}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\psi_{00}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi_{00}}{\partial r}\Big)+V_\infty\psi_{00},\ r>R,\ 0<t\leqslant T,\tag{3.8.17}$$

$$\psi_{00}|_{r=R}=a_{00}(t),\tag{3.8.18}$$

$$\psi_{00}|_{t=0} = 0, \tag{3.8.19}$$

$$\psi_{00} \to 0, \quad 当\ r \to +\infty. \tag{3.8.20}$$

2. $\psi_{nm}(r,t)$ (或 $\phi_{nm}(r,t)$) 是下面的初边值问题的解：

$$\mathrm{i}\frac{\partial G_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}G_n\Big) + V_\infty G_n,$$
$$r > R,\ 0 < t \leqslant T, \tag{3.8.21}$$

$$G_n|_{r=R} = a_{nm}(t)\ (或\ b_{nm}(t)), \tag{3.8.22}$$

$$G_n|_{t=0} = 0, \tag{3.8.23}$$

$$G_n \to 0, \quad 当\ r \to +\infty. \tag{3.8.24}$$

问题 (3.8.17)~(3.8.20) 的解 $\psi_{00}(r,t)$ 由 [Han and Huang, 2002-A] 给出：

$$\psi_{00}(r,t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_\infty t}\frac{R}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{r-R}{\sqrt{t}}}^{\infty}$$
$$\bullet\ a_{00}\Big(t - \frac{(r-R)^2}{\mu^2}\Big)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(t-\frac{(r-R)^2}{\mu^2})}\mathrm{d}\mu. \tag{3.8.25}$$

则我们有：

$$\frac{\partial\psi_{00}}{\partial r}(R,t) = -\frac{1}{R}a_{00}(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}$$
$$\bullet\ \Big(a_{00}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\Big)\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda. \tag{3.8.26}$$

下面我们考虑初边值问题 (3.8.21)~(3.8.24)。 令 $G_n(r,t) = \omega_n(r,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_\infty t}$，则 $w_n(r,t)$ 满足：

$$\mathrm{i}\frac{\partial \omega_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \omega_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\omega_n\Big),$$
$$r > R,\ 0 < t \leqslant T, \tag{3.8.27}$$

$$\omega_n|_{r=R} = a_{nm}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty t}, \tag{3.8.28}$$

$$\omega_n|_{t=0} = 0, \tag{3.8.29}$$

$$\omega_n \to 0, \quad 当\ r \to +\infty. \tag{3.8.30}$$

我们先考虑下面的简化问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial \omega_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \omega_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\omega_n\Big),$$
$$r > R,\ 0 < t \leqslant T, \tag{3.8.31}$$

$$\omega_n|_{r=R} = 1, \tag{3.8.32}$$

$$\omega_n|_{t=0} = 0, \tag{3.8.33}$$

$$\omega_n \to 0, \quad \text{当 } r \to +\infty. \tag{3.8.34}$$

令：

$$\omega_n(r,t) = u_n(r)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}, \quad \mu > 0.$$

则 $u_n(r)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} + \left(\mu^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)u_n = 0. \tag{3.8.35}$$

方程 (3.8.35) 有两个线性独立的解：

$$w_1(\mu r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu r}} J_{n+1/2}(\mu r), \quad w_2(\mu r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu r}} Y_{n+1/2}(\mu r). \tag{3.8.36}$$

令：

$$G_*(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}\frac{w_1(\mu r)w_2(\mu R) - w_1(\mu R)w_2(\mu r)}{w_1^2(\mu R) + w_2^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}. \tag{3.8.37}$$

直接验证可知 $G_*(r,t)$ 满足 (3.8.31) 且有：

$$\begin{aligned}
G_*(r,t)|_{r=R} =& 0,\\
G_*(r,t)|_{t=0} =& \lim_{t\to+0} G_*(r,t)\\
=& \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w_1(\mu r)w_2(\mu R) - w_1(\mu R)w_2(\mu r)}{w_1^2(\mu R) + w_2^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\\
=& \frac{2}{\pi}\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2}\\
&\cdot \int_0^\infty \frac{J_{n+1/2}(\mu r)Y_{n+1/2}(\mu R) - Y_{n+1/2}(\mu r)J_{n+1/2}(\mu R)}{J_{n+1/2}^2(\mu R) + Y_{n+1/2}^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}\\
=& -\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \quad r > R.
\end{aligned}$$

其中最后一个等式可在 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980, P. 679) 中找到。令：

$$G_n(r,t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} + G_*(r,t), \tag{3.8.38}$$

则 $G_n(r,t)$ 是 (3.8.31)~(3.8.34) 的解。由 Duhamel 原理我们得到 (3.8.27)~(3.8.30) 的解

$$\begin{aligned}\omega_n(r,t)&=\int_0^t a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda}\frac{\partial}{\partial t}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=-\int_0^t a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=-a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda}G_n(r,t-\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=t}\\&\quad+\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda})G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda})G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}\tag{3.8.39}$$

因此我们有：

$$\psi_{nm}(r,t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_\infty t}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda}\right)G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda,\tag{3.8.40}$$

$$\phi_{nm}(r,t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}V_\infty t}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(b_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty\lambda}\right)G_n(r,t-\lambda)\mathrm{d}\lambda.\tag{3.8.41}$$

进一步我们有：

$$\frac{\partial\psi_{nm}(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R}=\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})\frac{\partial G_n(r,t-\lambda)}{\partial r}\Big|_{r=R}\mathrm{d}\lambda,\tag{3.8.42}$$

$$\frac{\partial\phi_{nm}(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R}=\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}(b_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})\frac{\partial G_n(r,t-\lambda)}{\partial r}\Big|_{r=R}\mathrm{d}\lambda,\tag{3.8.43}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_n(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R}&=-\frac{n+1}{R}+\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2t}\\&\quad\cdot\frac{J'_{n+\frac12}(\mu R)Y_{n+\frac12}(\mu R)-J_{n+\frac12}(\mu R)Y'_{n+\frac12}(\mu R)}{J^2_{n+\frac12}(\mu R)+Y^2_{n+\frac12}(\mu R)}\mathrm{d}\mu.\\&=-\frac{n+1}{R}-\frac{4}{\pi^2R}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2t}}{J^2_{n+\frac12}(\mu R)+Y^2_{n+\frac12}(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}.\end{aligned}\tag{3.8.44}$$

其中我们应用了 Wronskian 关系式：

$$J'_{n+\frac{1}{2}}(\mu R)Y_{n+\frac{1}{2}}(\mu R) - J_{n+\frac{1}{2}}(\mu R)Y'_{n+\frac{1}{2}}(\mu R) = -\frac{2}{\pi\mu R}.$$

令：

$$S_{n+\frac{1}{2}}(t) = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\mu^2 t}}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu R) + Y^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu},$$

则：

$$\left.\frac{\partial G_n(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R} = -\frac{n+1}{R} - \frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t)}{R\sqrt{\pi t}}. \tag{3.8.45}$$

将 (3.8.27) 式代入到 (3.8.42)~(3.8.43) 我们得到：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \psi_{nm}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R} =& -\frac{n+1}{R}a_{nm}(t) - \frac{1}{R\sqrt{\pi}}\\ &\cdot\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(t-\lambda)})\frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda,\end{aligned} \tag{3.8.46}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \phi_{nm}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R} =& -\frac{n+1}{R}b_{nm}(t) - \frac{1}{R\sqrt{\pi}}\\ &\cdot\int_0^T \frac{\partial}{\partial\lambda}(b_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(t-\lambda)})\frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda.\end{aligned} \tag{3.8.47}$$

由 (3.8.16) 我们得到：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right|_{r=R} =& -\frac{1}{2R}a_{00}(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{00}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2}\Big[-\frac{n+1}{R}a_{n0}(t) - \frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{n0}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\\ &\cdot\frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\Big]P_n^0(\cos\theta)\mathrm{d}\lambda\Big\}\\ &+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\Big\{-\frac{n+1}{R}(a_{nm}(t)\cos m\varphi + b_{nm}(t)\sin m\varphi)\\ &-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\cos m\varphi\\ &+\frac{\partial}{\partial\lambda}(b_{nm}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\sin m\varphi)\mathrm{d}\lambda\Big\}.\end{aligned} \tag{3.8.48}$$

将 (3.8.14)~(3.8.15) 代入上式并应用 Legendre 函数的加法定理

$$P_n(\cos\gamma) = P_n^0(\cos\xi)P_n^0(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\xi)P_n^m(\cos\theta)\cos m(\eta-\varphi),$$

其中，

$$\cos\gamma = \cos\xi\cos\theta + \sin\xi\sin\theta\cos(\eta-\varphi),$$

我们可以将 (3.8.48) 简化为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R} =& -\frac{1}{4\pi R}\int_{\Gamma_1}\psi(R,\xi,\eta,t)\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\\ &-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{4(\pi)^{3/2}R}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\psi(R,\xi,\eta,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_{\Gamma_1}\psi(R,\xi,\eta,t)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\\ &+\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\psi(R,\xi,\eta,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\\ &\cdot\frac{S_{n+1/2}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\Big\}\\ \equiv& \mathcal{L}_\infty\Big(\psi|_{\Gamma_R},\theta,\varphi,t\Big).\end{aligned} \tag{3.8.49}$$

等式 (3.8.49) 是初边值问题 (3.8.1)~(3.8.3) 的解在人工边界 Σ_R 上满足的准确边界条件。利用 (3.8.49) 我们可以将无界问题 (3.8.1)~(3.8.3) 简化为在有界区域 $D_i = \Omega_i \times [0,T]$ 上的初边值问题：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi + V(x,t)\psi \quad (x,t)\in D_i^T, \tag{3.8.50}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi^0(x), \qquad x\in\Omega_i, \tag{3.8.51}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R} = \mathcal{L}_\infty\Big(\psi|_{\Gamma_R},\theta,\varphi,t\Big), \quad 0<t\leqslant T. \tag{3.8.52}$$

在实际计算中，我们取无穷级数中的前几项，得到下面的近似人工边界条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R} =& -\frac{1}{4\pi R}\int_{\Gamma_1}\psi(R,\xi,\eta,t)\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\\ &-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{4(\pi)^{3/2}R}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\psi(R,\xi,\eta,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{N}\Big\{\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_{\Gamma_1}\psi(R,\xi,\eta,t)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\\
&+\frac{2n+1}{4(\pi)^{3/2}R}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\psi(R,\xi,\eta,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}s_{\xi,\eta}\\
&\cdot\frac{S_{n+1/2}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\Big\}\\
\equiv\;&\mathcal{L}_N\Big(\psi\big|_{\Gamma_R},\theta,\varphi,t\Big).
\end{aligned}\tag{3.8.53}
$$

利用近似边界条件 (3.8.53)，我们可以得到在有界计算区域 D_i 上的一系列的近似问题。

3.8.2　近似简化初边值问题的稳定性分析

在这一小节中我们讨论下面的近似简化初边值问题的稳定性：

$$
\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Delta\psi+V(x,t)\psi,\quad (x,t)\in D_i,\tag{3.8.54}
$$

$$
\psi|_{t=0}=\psi^0(x),\qquad x\in\Omega_i,\tag{3.8.55}
$$

$$
\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R}=\mathcal{L}_N\Big(\psi\big|_{\Gamma_R},\theta,\varphi,t\Big),\quad 0<t\leqslant T.\tag{3.8.56}
$$

首先我们有下面的引理：

引理 3.8.1　假设 $\psi(x,t)$ 是初边值问题 (3.8.54)~(3.8.56) 的解，则有：

$$
\mathrm{Im}\Big\{\int_0^t\int_{\Gamma_R}\mathcal{L}_N\Big(\psi|_{\Gamma_R},\theta,\varphi,\tau\Big)\overline{\psi}|_{\Gamma_R}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\Big\}\geqslant 0,\ 0\leqslant t\leqslant T.\tag{3.8.57}
$$

证明　令：

$$
\begin{aligned}
\psi(R,\theta,\varphi,t)=&\frac{a_{00}(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{a_{n0}(t)}{2}P_n^0(\cos\theta)\\
&+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\Big[a_{nm}(t)\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

另一方面由等式 (3.8.48)，记：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R}=&-\frac{1}{2R}a_{00}(t)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2R\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{00}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2}\Big[-\frac{n+1}{R}a_{n0}(t)-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{n0}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\Big]P_n^0(\cos\theta)\mathrm{d}\lambda\Big\} \\
&+\sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta)\Big\{-\frac{n+1}{R}(a_{nm}(t)\cos m\varphi + b_{nm}(t)\sin m\varphi) \\
&-\frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}(a_{nm}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\cos m\varphi \\
&+\frac{\partial}{\partial\lambda}(b_{nm}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)}\sin m\varphi\Big)\mathrm{d}\lambda\Big\}. \\
\equiv\ & W_0(a_{00}(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n(a_{n0}(t))P_n^0(\cos\theta) \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\{W_n(a_{nm}(t))\cos m\varphi + W_n(b_{nm}(t))\sin m\varphi\}P_n^m(\cos\theta),
\end{aligned}
\tag{3.8.58}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
W_0(f(t)) &= -\frac{1}{2R}f(t) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}(f(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})\frac{1}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda, \\
W_n(f(t)) &= -\frac{n+1}{R}f(t) - \frac{1}{R\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}(f(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}V_\infty(\lambda-t)})\frac{S_{n+\frac{1}{2}}(t-\lambda)}{\sqrt{t-\lambda}}\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}
$$

因此我们有：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathcal{L}_N\Big(\psi\big|_{\Gamma_R},\theta,\varphi,\tau\Big)\overline{\psi}\big|_{\Gamma_R}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\tau \\
=\ & 2\pi R^2\int_0^t\Big\{W_0(a_{00}(\tau))\overline{a_{00}(\tau)} + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}W_n(a_{n0}(\tau))\overline{a_{n0}(\tau)} \\
&+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\Big\{W_n(a_{nm}(\tau))\overline{a_{nm}(\tau)} \\
&+W_n(b_{nm}(\tau))\overline{b_{nm}(\tau)}\Big\}\Big\}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{3.8.59}
$$

在区域 $D_e = \Omega_e \times [0,T]$ 上考虑下面的辅助问题：

$$
\frac{\partial G_n}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}G_n\Big) + V_\infty G_n, \quad r > R, 0 < t \leqslant T, \tag{3.8.60}
$$

$$
G_n|_{r=R} = a_{nm}(t) \quad (\text{or } b_{nm}(t)), \tag{3.8.61}
$$

$$
G_n|_{t=0} = 0, \tag{3.8.62}
$$

$$
G_n \to 0, \text{ 当 } r \to +\infty. \tag{3.8.63}
$$

则有:

$$\frac{\partial G_n}{\partial r}\Big|_{r=R}=W_n(a_{nm}(t)).$$

以 $r^2\overline{G_n(r,t)}$ 乘以方程 (3.8.60) 两端，取共轭，我们得到:

$$\mathrm{i}r^2\overline{G_n}\frac{\partial G_n}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial G_n}{\partial r}\Big)\overline{G_n}-n(n+1)|G_n|^2)+r^2V_\infty|G_n|^2, \tag{3.8.64}$$

$$-\mathrm{i}r^2G_n\frac{\partial\overline{G_n}}{\partial t}=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\overline{G_n}}{\partial r}\Big)G_n-n(n+1)|G_n|^2)+r^2V_\infty|G_n|^2. \tag{3.8.65}$$

因此我们得到:

$$\mathrm{i}r^2\frac{\partial}{\partial t}|G_n|^2=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial G_n}{\partial r}\Big)\overline{G_n}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\overline{G_n}}{\partial r}\Big)G_n. \tag{3.8.66}$$

对 (3.8.66) 在 $[R,\infty)$ 上积分，利用 (3.8.62)，我们得到:

$$\mathrm{i}\int_0^\infty r^2|G_n|^2\mathrm{d}r=\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\Big\{R^2\int_0^t\frac{\partial G_n}{\partial r}\overline{G_n}\mathrm{d}\tau\Big\},$$

即:

$$0\leqslant\mathrm{Im}\Big\{\int_0^t\frac{\partial G_n}{\partial r}\overline{G_n}\mathrm{d}\tau\Big\}=\mathrm{Im}\Big\{\int_0^t W_n(a_{nm}(\tau))\overline{a_{nm}(\tau)}\mathrm{d}\tau\Big\}. \tag{3.8.67}$$

类似地我们可以证明:

$$0\leqslant\mathrm{Im}\Big\{\int_0^t W_n(b_{nm}(\tau))\overline{b_{nm}(\tau)}\mathrm{d}\tau\Big\}. \tag{3.8.68}$$

最后，由 (3.8.59)，(3.8.67) 和 (3.8.68) 即得引理结果。 ■

利用引理 3.8.1，我们可得下面的稳定性估计:

定理 3.8.1　设 ψ 是 (3.8.54)~(3.8.56) 的解，则有下面的稳定性估计:

$$\int_{\Omega_i}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega_i}|\psi^0(x)|^2\mathrm{d}x,\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{3.8.69}$$

证明　以 $\overline{\psi}$ 乘以方程 (3.8.54) 两端，取共轭，我们得到:

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}\overline{\psi}=-\frac{1}{2}\overline{\psi}\Delta\psi+V(x,t)\psi\overline{\psi},$$

$$-\mathrm{i}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}\psi=-\frac{1}{2}\psi\Delta\overline{\psi}+V(x,t)\psi\overline{\psi}.$$

由此我们得到:

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2=-\frac{1}{2}\overline{\psi}\Delta\psi+\frac{1}{2}\psi\Delta\overline{\psi}.$$

对上式在 Ω_i^{T} 上积分，分部积分，我们得到：

$$\int_{\Omega_i} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\Omega_i} |\psi^0(x)|^2 \mathrm{d}x \\ -\mathrm{Im}\left\{\int_0^t \int_{\Gamma_R} \mathcal{L}_N(\psi|_{\Gamma_R}, \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{\Gamma_R})\overline{\psi}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{3.8.70}$$

再由引理 3.8.1，即得不等式 (3.8.69) ■

由稳定性估计 (3.8.69) 我们立刻得到

定理 3.8.2 近似简化初边值问题 (3.8.54)~(3.8.56) 最多只有一个解。 ■

本章的内容主要来源于下列文献： Wu and Sun (2004); Han and Huang (2002-A); Han and Huang (2002-B); Han and Yin (2005); Sun and Wu (2006); Han and Huang (2004); Han, Yin and Huang (2007)。读者可进一步参阅上述文献中的数值计算例子。其他的相关工作可参阅论文： Greengard and Lin (1998); Antoine and Besse (2003); Antoine, Besse and Descombes (2006); Arnold (1998); Arnold (2001); Baskakov and Popov (1991); Hellums and Frensley (1994); Mayfield (1989); Jiang and Greengard (2004); Han, Jin and Wu (2005); Han and Wu (2003); Han, Zhu, Brunner and Ma (2005, 2006); Schädle (2002); Schmidt and Yevick (1997)。

第 4 章　声波方程，Klein-Gordon 方程和线性 KdV 方程的完全吸收边界条件

在这一章中我们研究在无界区域 $\mathbb{R}^n(n=1,2,3)$ 上数值求解声波方程，Klein-Gordon 方程和线性 KdV 方程的人工边界方法，讨论它们的完全吸收边界条件。

4.1　一维声波方程

本节中我们讨论下面一维声波方程的初值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ \forall x\in\mathbb{R}^1,\ t\in(0,T], \tag{4.1.1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x),\ u_t|_{t=0}=\varphi_1(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^1, \tag{4.1.2}$$

其中 $a>0$ 表示声速，未知函数 $u(x,t)$ 表示压力，$\varphi_0(x),\varphi_1(x),f(x,t)$ 为已知函数，假设 $f(x,t)$ 的支集 $\mathrm{Supp}\{f(x,t)\}\subset[0,1]\times[0,T]$。

初值问题定义于无界区域 $\mathbb{R}^1\times[0,T]$ 上，为了克服区域的无界性给数值计算带来的困难，引进人工边界：

$$\Sigma_1=\Big\{(x,t)|\ x=1,\ 0\leqslant t\leqslant T\Big\}, \tag{4.1.3}$$

$$\Sigma_0=\Big\{(x,t)|\ x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\Big\}. \tag{4.1.4}$$

人工边界 Σ_0,Σ_1 将区域 $\mathbb{R}^1\times[0,T]$ 分割为三部分 $D_i=[0,1]\times[0,T]$，$D_0=(-\infty,0]\times[0,T]$ 和 $D_1=[1,+\infty)\times[0,T]$。

如果我们能够在人工边界 Σ_1,Σ_0 上找到初值问题 (4.1.1)~(4.1.2) 的解满足的准确边界条件，则我们可以将初值问题 (4.1.1)~(4.1.2) 简化为有界区域 D_i 上的初边值问题。

4.1.1　人工边界 Σ_1,Σ_0 上的完全透明边界条件

考虑初值问题 (4.1.1)~(4.1.2) 的解在区域 D_1 上的限制，则 $u(x,t)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall (x,t) \in D_1, \tag{4.1.5}$$

$$u|_{\Sigma_1} = u(1,t) \equiv g_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{4.1.6}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \ u_t|_{t=0} = \varphi_1(x), \ x \geqslant 1. \tag{4.1.7}$$

由于 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_1 上的值是未知的。问题 (4.1.5)~(4.1.7) 是一个提法不完全的问题，不能独立求解。假设 $u|_{\Sigma_1} = u(1,t) \equiv g_1(t)$ 已知，则我们可以求出问题 (4.1.5)~(4.1.7) 的解。

初值问题 (4.1.5)~(4.1.7) 的解可表示为：

$$u(x,t) = h_1(x-at) + h_2(x+at), \quad x \geqslant 1, \ t \in [0,T], \tag{4.1.8}$$

其中 $h_1(x), h_2(x)$ 是两个待定的函数，$h_1(x)$ 的定义区域为 $[1-aT, +\infty)$，$h_2(x)$ 的定义区域为 $[1, +\infty)$。由初始条件 (4.1.7) 得到：

$$h_1(x) + h_2(x) = \varphi_0(x), \quad x \geqslant 1,$$

$$-ah_1'(x) + ah_2'(x) = \varphi_1(x), \quad x \geqslant 1.$$

由上式可得

$$h_1(x) = \frac{1}{2}\left\{\varphi_0(x) - \frac{1}{a}\int_1^x \varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi - C\right\}, \ x \geqslant 1,$$

$$h_2(x) = \frac{1}{2}\left\{\varphi_0(x) + \frac{1}{a}\int_1^x \varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi + C\right\}, \ x \geqslant 1.$$

其中 C 是一个任意常数。

余下来只需在 $[1-aT, 1]$ 上确定 $h_1(x)$，由边界条件 (4.1.6) 可得：

$$g_1(t) = h_1(1-at) + h_2(1+at), \quad t \in [0,T],$$

即：

$$\begin{aligned} h_1(x) &= g_1\left(\frac{1-x}{a}\right) - h_2(2-x) \\ &= g_1\left(\frac{1-x}{a}\right) - \frac{1}{2}\left\{\varphi_0(2-x) + \frac{1}{a}\int_1^{2-x} \varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi + C\right\}, \\ & 1-aT \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}$$

在 $h_1(x), h_2(x)$ 的表示式中常数 C 可取为零，即：

$$h_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left\{\varphi_0(x)-\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_1^x\varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right\},\ x\geqslant 1,\\ g_1\left(\dfrac{1-x}{a}\right)-\dfrac{1}{2}\left\{\varphi_0(2-x)+\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_1^{2-x}\varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right\},\\ \qquad\qquad 1-aT\leqslant x\leqslant 1,\end{cases} \tag{4.1.9}$$

$$h_2(x)=\frac{1}{2}\left\{\varphi_0(x)+\frac{1}{a}\int_1^x\varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi\right\},\quad x\geqslant 1. \tag{4.1.10}$$

由此得到初边值问题 (4.1.5)~(4.1.7) 的解 $u(x,t)$，并且，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\Sigma_1}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1}&=\left[h_1'(x-at)+h_2'(x+at)\right]\Big|_{x=1}\\&=-\frac{1}{a}g_1'(t)+\varphi_0'(1+at)+\frac{1}{a}\varphi_1(1+at).\end{aligned}$$

注意到：

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Sigma_1}=g_1'(t).$$

在人工边界 Σ_1 上我们得到：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{\Sigma_1}=\varphi_0'(1+at)+\frac{1}{a}\varphi_1(1+at). \tag{4.1.11}$$

等式 (4.1.11) 是初值问题 (4.1.1)~(4.1.2) 在人工边界 Σ_1 上满足的严格边界条件。区域 D_i 外的波可通过 Σ_1 进入 D_i，D_i 上的波可通过 Σ_1 传播出去。我们称边界条件 (4.1.11) 为完全透明边界条件。

通过类似的分析可得初值问题 (4.1.1)~(4.1.2) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_0 上满足的边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{\Sigma_0}=\varphi_0'(-at)-\frac{1}{a}\varphi_1(-at),\ t\geqslant 0. \tag{4.1.12}$$

应用完全透明的边界条件 (4.1.11)~(4.1.12) 可将初值问题 (4.1.1)~(4.1.2) 等价地简化为区域 D_i 上的初边值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ \ \forall(x,t)\in D_i, \tag{4.1.13}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{\Sigma_1}=\varphi_0'(1+at)+\frac{1}{a}\varphi_1(1+at),\ t\geqslant 0, \tag{4.1.14}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_{\Sigma_0}=\varphi_0'(-at)-\frac{1}{a}\varphi_1(-at),\ t\geqslant 0, \tag{4.1.15}$$

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad u_t|_{t=0}=\varphi_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{4.1.16}$$

在有界计算区域 D_i 上可以对初边值问题 (4.1.13)~(4.1.16) 进行离散化，例如应用差分方法，可以得到问题的数值近似解。

若假设初始函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 的支集是紧的，并且，

$$\mathrm{Supp}\{\varphi_0(x)\} \subset [0,1],\ \mathrm{Supp}\{\varphi_1(x)\} \subset [0,1].$$

则对问题 (4.1.1)~(4.1.2) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_1, Σ_0 上满足熟知的完全吸收边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{\Sigma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial u}{\partial t}\right)\bigg|_{\Sigma_0} = 0. \tag{4.1.17}$$

4.2 二维声波方程

考虑下面二维无界区域上声波方程的初边值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(\boldsymbol{x},t),\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \Omega \times (0,T], \tag{4.2.1}$$

$$u|_{\Gamma} = g(\boldsymbol{x},t),\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \Gamma \times (0,T], \tag{4.2.2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(\boldsymbol{x}),\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.2.3}$$

$$u_t|_{t=0} = \varphi_1(\boldsymbol{x}),\ \forall\ \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.2.4}$$

其中 $\Omega \subset R^2$ 是以有界闭曲线 Γ 为边界的外区域，满足 1.1 节中的条件，$f(\boldsymbol{x},t)$，$g(\boldsymbol{x},t)$，$\varphi_0(\boldsymbol{x})$，$\varphi_1(\boldsymbol{x})$ 为已知函数，并且函数 $f(\boldsymbol{x},t)$，$\varphi_0(\boldsymbol{x})$，$\varphi_1(\boldsymbol{x})$ 的支集是紧的，设 $\mathrm{Supp}\{\varphi_0(x)\} \subset B_0 (B_0 = \{x \mid |x| = R_o\})$，$\mathrm{Supp}\{\varphi_1(x)\} \subset B_0$。$\mathrm{Supp}\{f(\boldsymbol{x}, t)\} \subset B_0 \times [0,T]$。在无界区域 $\Omega\times[0,T]$ 上讨论问题 (4.2.1)~(4.2.4) 的数值解。在 $\Omega \times [0,T]$ 上引进人工边界：

$$\Sigma_R = \{(x,t) \mid |\boldsymbol{x}| = R,\ 0 \leqslant t \leqslant T\};\ R > R_0 \tag{4.2.5}$$

人工边界 $\Sigma_R = \Gamma_R \times (0,T]$ 将区域 $\Omega \times (0,T]$ 分割为有界部分 $D_i = \Omega_i \times (0,T]$ 和无界部分 $D_e = \Omega_e \times (0,T]$。

这一节的主要任务是在人工边界 Σ_R 上找出问题 (4.2.1)~(4.2.4) 的解 $u(x,t)$ 满足的完全吸收人工边界条件。

4.2.1 完全吸收边界条件

考虑问题 (4.2.1)~(4.2.4) 的解 u 在区域 $\Omega_e \times [0,T]$ 上的限制，在极坐标下

满足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_e \times (0, T], \tag{4.2.6}$$

$$u|_{\Sigma_R} = u(R, \theta, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.2.7}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad |x| \geqslant R, \tag{4.2.8}$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \quad |x| \geqslant R. \tag{4.2.9}$$

由于解 u 在人工边界 Σ_R 上的值 $u(R,\theta,t)$ 是未知的，问题 (4.2.6)~(4.2.9) 不能独立求解。如果 $u(R,\theta,t)$ 的值已知，则问题 (4.2.6)~(4.2.9) 存在唯一解。首先将 $u(R,\theta,t)$ 展开为如下傅氏级数：

$$u(R, \theta, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n(t) \cos n\theta + b_n(t) \sin n\theta \Big\}, \tag{4.2.10}$$

其中，

$$a_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi, t) \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \tag{4.2.11}$$

$$b_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi, t) \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi. \tag{4.2.12}$$

类似地将问题 (4.2.6)~(4.2.9) 的解 $u(r,\theta,t)$ 进行傅氏展开可得：

$$u(r, \theta, t) = \frac{u_0(r,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ u_n(r,t) \cos n\theta + v_n(r,t) \sin n\theta \Big\}, \tag{4.2.13}$$

其中，

$$u_n(r,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, t) \cos n\varphi \mathrm{d}\varphi, \tag{4.2.14}$$

$$v_n(r,t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, t) \sin n\varphi \mathrm{d}\varphi. \tag{4.2.15}$$

将表达式 (4.2.13) 代入初边值问题 (4.2.6)~(4.2.9)，可知 $u_n(r,t)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} u_n, \quad r > R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.2.16}$$

$$u_n(R, t) = a_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.2.17}$$

$$u_n(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(r, 0) = 0, \quad r > R. \tag{4.2.18}$$

并且 $v_n(r,t)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}v_n, \quad r > R,\ 0 < t \leqslant T, \tag{4.2.19}$$

$$v_n(R,t) = b_n(t),\ 0 < t \leqslant T, \tag{4.2.20}$$

$$v_n(r,0) = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial t}(r,0) = 0,\ r > R. \tag{4.2.21}$$

为求解问题 (4.2.16)~(4.2.18) 和问题 (4.2.19)~(4.2.21)，首先研究下面的辅助问题：

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}G_n,\ r > R,\ 0 < t \leqslant T, \tag{4.2.22}$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial t}(R,t) = 1,\ 0 < t \leqslant T, \tag{4.2.23}$$

$$G_n(r,0) = 0, \quad \frac{\partial G_n(r,0)}{\partial t} = 0,\ r > R. \tag{4.2.24}$$

对任意 $\omega > 0$，假设 $\sin\omega t W(r)$ 为方程 (4.2.22) 的解，则 $W(r)$ 满足方程：

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \left(\omega^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)W = 0. \tag{4.2.25}$$

方程 (4.2.25) 是 n 阶 Bessel 方程 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980)，它有两个线性独立的解 $J_n(\omega r)$ 和 $Y_n(\omega r)$ 。对于 $\omega > 0$，函数

$$\frac{\sin\omega t}{\omega^2}\frac{J_n(\omega r)Y_n(\omega R) - Y_n(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R) + Y_n^2(\omega R)}$$

是方程 (4.2.22) 的解。令：

$$G_n^*(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega^2}\frac{J_n(\omega r)Y_n(\omega R) - Y_n(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R) + Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega, \tag{4.2.26}$$

为了讨论 $G_n^*(r,t)$ 的性质，我们首先回顾 Bessel 函数 $J_n(z), Y_n(z)$ 在零点的展开式 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980, P.951)。

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(n+k+1)}, \quad (|\arg z| < \pi), \tag{4.2.27}$$

$$\begin{aligned}\pi Y_n(z) = {}& 2J_n(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ & - \left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\frac{z}{2})^{n+2k}}{k!(k+n)!}\left[\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right],\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

其中 C 是 Euler 常数。

由 (4.2.27) 和 (4.2.28) 可知存在常数 $\epsilon \in (0,1)$，使

$$J_0(\omega) = 1 + O(\omega^2), \quad \omega \to +0, \tag{4.2.29}$$

$$Y_0(\omega) = \frac{2}{\pi}(\ln\omega + C - \ln 2) + O(\omega^{2-\epsilon}), \ \omega \to +0, \tag{4.2.30}$$

$$J_n(\omega) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^n + O(\omega^{n+2}), \ \omega \to +0, \tag{4.2.31}$$

$$Y_n(\omega) = -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-n} + O(\omega^{-n+2-\epsilon}), \ \omega \to 0. \tag{4.2.32}$$

由 Bessel 函数的渐进近似展开式 (Gradshteyn and Kyzhik, 1980, P.962) 可得：

$$\begin{aligned}
J_n^2(\omega) + Y_n^2(\omega) &\sim \frac{2}{\pi\omega}\left[\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{(n,m)}{(2\mathrm{i}\omega)^m}\right]\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(n,m)}{(2\mathrm{i}\omega)^m}\right] \\
&= \frac{2}{\pi\omega}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\frac{(n,k)}{(2\mathrm{i}\omega)^k}\frac{(n,2m-k)}{(2\mathrm{i}\omega)^{2m-k}} \\
&= \frac{2}{\pi\omega}\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k(n,k)(n,2m-k)}{(-4)} \\
&= \frac{2}{\pi\omega}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{a_m^n}{\omega^{2m}}, \quad \omega \to +\infty.
\end{aligned}$$

其中，

$$(n,k) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+k)}{k!\,\Gamma(n+\frac{1}{2}-k)},$$

$$a_m^n = \frac{1}{(-4)^m}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(n,k)(n,2m-k).$$

注意 $a_0^n = 1$，令：

$$\frac{1}{\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\frac{a_m^n}{\omega^{2m}}} = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m^n \frac{1}{\omega^{2m}},$$

则有：$\{b_m^n\}$ 可由 $\{a_m^n\}$ 确定，

$$\begin{aligned}
&b_0^n = 1, \\
&b_m^n a_0^n + b_{m-1}^n a_1^n + \cdots + b_0^n a_m^n = 0,
\end{aligned}$$

即 $\{b_m^n\}$ 可由 $\{a_m^n\}$ 确定并可得渐进展开：

$$\frac{1}{J_n^2(\omega)+Y_n^2(\omega)} \sim \frac{\pi\omega}{2}\left[1+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{b_m^n}{\omega^{2m}}\right], \quad \omega \to +\infty, \tag{4.2.33}$$

由此对 $G_n^*(r,t)$ 可得：

1. $G_n^*(r,t)$ 在 $(r,t)\in[R,+\infty)\times[0,T]$ 上是绝对可积，并且 $G_n^*(r,t)$ 在 $[R,+\infty)\times[0,T]$ 上连续。

2. $G_n^*(r,t)$ 在 $[R,+\infty)\times[0,T]\backslash\Gamma_{R,0}$ 上是可微的，而且

$$\frac{\partial G_n^*(r,t)}{\partial r}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\frac{J_n'(\omega r)Y_n(\omega R)-Y_n'(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega, \tag{4.2.34}$$

$$\frac{\partial G_n^*(r,t)}{\partial t}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega}\frac{J_n(\omega r)Y_n(\omega R)-Y_n(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega. \tag{4.2.35}$$

其中 $\Gamma_{R,0}$ 表示特征线 $\{(r,t)\mid r=R+t, t\geqslant 0\}$。

3. $G_n^*(R,t)=0$,

$G_n^*(r,0)=0, \quad r>R$。

4. 由等式 (4.2.34) 和式 (4.2.35) 可得：

$$\frac{\partial G_n^*(R,t)}{\partial r}=-\frac{4}{\pi^2 R}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}\frac{1}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega, \ t>0, \tag{4.2.36}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_n^*(r,0)}{\partial t}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\frac{J_n(\omega r)Y_n(\omega R)-Y_n(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega\\&=-\left(\frac{R}{r}\right)^n, \quad r>R.\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

上式最后一个等式来自文献 (Gradshtetn and Kyzhik,1980,P.679)。这个等式在这一节中起非常重要的作用。

5. $G_n^*(r,t)$ 是方程 (4.2.22) 的一个弱解。

令：

$$G_n(r,t)=t\left(\frac{R}{r}\right)^n+G_n^*(r,t),$$

则有：

定理 4.2.1 $G_n(r,t)$ 是初边值问题 (4.2.22)~(4.2.24) 的解。

进一步应用 Dunamel 原理 (Carslaw and Jaeger,1959, P.30) 可得初边值问题 (4.2.16)~(4.2.18) 的解 $u_n(r,t)$ 和初边值问题 (4.2.19)~(4.2.21) 的解 $v_n(r,t)$

的表达式：

$$\begin{aligned}u_n(r,t)&=\int_0^t \frac{\partial a_n(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial G_n(r,t-\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau\\&=\left(\frac{R}{r}\right)^n a_n(t)+\int_0^t \frac{\partial a_n(\tau)}{\partial \tau^2}G_n^*(r,t-\tau)\mathrm{d}\tau,\ n=0,1,\cdots,\\v_n(r,t)&=\int_0^t \frac{\partial b_n(\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial G_n(r,t-\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau\\&=\left(\frac{R}{r}\right)^n b_n(t)+\int_0^t \frac{\partial^2 b_n(\tau)}{\partial \tau^2}G_n^*(r,t-\tau)\mathrm{d}\tau,\ n=1,2,\cdots.\end{aligned}$$ ■

在人工边界 Σ_R 上

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n(R,t)}{\partial r}&=-\left(\frac{n}{R}\right)a_n(t)+\int_0^t \frac{\partial^2 a_n(\tau)}{\partial \tau^2}\frac{\partial G_n^*(R,t-tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau\\&=-\frac{n}{R}u_n(R,t)+\int_0^t \frac{\partial^2 u_n(R,t)}{\partial \tau^2}\frac{\partial G_n^*(R,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{4.2.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{v_n(R,t)}{\partial r}&=-\frac{n}{R}b_n(t)+\int_0^t \frac{\partial^2 b_n(\tau)}{\partial \tau^2}\frac{G_n^*(R,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau\\&=-\left(\frac{n}{R}\right)v_n(R,t)+\int_0^t \frac{\partial^2 v_n(R,\tau)}{\partial \tau^2}\frac{G_n^*(R,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{4.2.39}$$

记：

$$HZ_n(t)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}\frac{1}{J_n^2(\omega)+Y_n^2(\omega)}\mathrm{d}\omega,\tag{4.2.40}$$

则：

$$\frac{\partial G_n^*(R,t)}{\partial r}=-HZ_n\left(\frac{t}{R}\right).\tag{4.2.41}$$

将上式代入式 (4.2.38) 和式 (4.2.39) 可得：

$$\frac{\partial u_n}{\partial r}(R,t)=-\frac{n}{R}u_n(R,t)-\int_0^t \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}(R,\tau)HZ_n\left(\frac{t-\tau}{R}\right)\mathrm{d}\tau,\tag{4.2.42}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial r}(R,t)=-\frac{n}{R}v_n(R,t)-\int_0^t \frac{\partial v_n}{\partial \tau^2}HZ_n\left(\frac{t-\tau}{R}\right).\tag{4.2.43}$$

其中 $HZ_n(t),(n=0,1,\cdots)$ 是由等式 (4.2.40) 定义的一类新的特殊函数。可将 $HZ_n(t)$ 改写为下面的等价形式：

$$HZ_n(t)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^t \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}\left(\frac{1}{J_n^2(\omega)+Y_n^2(\omega)}-\frac{\pi}{2}\omega\right)\mathrm{d}\omega+1,$$

由此可知 $HZ_n(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续的微商 $HZ_n'(t), HZ_n''(t)$，并且

$$HZ_n'(t)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\left(\frac{1}{J_n^2(\omega)+Y_n(\omega)}-\frac{\pi}{2}\omega\right)\mathrm{d}\omega, \tag{4.2.44}$$

$$HZ_n''(t)=-\frac{4}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)\left(\frac{1}{J_n^2(\omega)+Y_n^2(\omega)}-\frac{\pi}{2}\omega\right)\mathrm{d}\omega, \tag{4.2.45}$$

$$HZ_n(0+)=1, \tag{4.2.46}$$

$$HZ_n'(0+)=\frac{1}{2}-n. \tag{4.2.47}$$

其中等式 (4.2.47) 仅是一个猜想，通过计算知道对 $0\leqslant n\leqslant 20$，它是成立的 (Han and Zheng, 2005-A)。应用特殊函数 $HZ_n(t)$ 的可微性，边界条件 (4.2.42) 和 (4.2.43) 有下面的等价形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n}{\partial r}(R,t)=&-\frac{n}{R}u_n(R,t)-\frac{\partial u_n}{\partial t}(R,t)\\&-\frac{1}{R}\int_0^t\frac{\partial u_n}{\partial \tau}(R,\tau)HZ_n'\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.2.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_n}{\partial r}(R,t)=&-\frac{n}{R}v_n(R,t)-\frac{\partial v_n}{\partial t}(R,t)\\&-\frac{1}{R}\int_0^t\frac{\partial v_n}{\partial \tau}HZ_n'\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.2.49}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n}{\partial r}(R,t)=&-\frac{1}{2R}u_n(R,t)-\frac{\partial u_n}{\partial t}(R,t)\\&-\frac{1}{R^2}\int_0^t u_n(R,\tau)HZ_n''\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.2.50}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_n}{\partial r}(R,t)=&-\frac{1}{2R}v_n(R,t)-\frac{\partial v_n}{\partial t}(R,t)\\&-\frac{1}{R^2}\int_0^t v_n(R,\tau)HZ_n''\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{4.2.51}$$

等式 (4.2.48)~(4.2.51) 给出了问题 (4.2.1)~(4.2.4) 的解 $u(r,\theta,t)$ 的傅氏系数 $(u_n(r,t),v_n(r,t))$ 在人工边界 Σ_R 上满足的准确边界条件。综合上述分析可得 $u(r,\theta,t)$ 在人工边界 Σ_R 上满足的准确边界条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)=&-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{+\infty}n\int_0^{2\pi}u(r,\varphi;t)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{+\infty}{}'\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(R,\varphi,\tau)}{\partial\tau^2}\cos n(\theta-\varphi)HZ_n\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\tau\\\equiv&\,\mathcal{K}^2\Big(u(R,\theta,t)\Big),\end{aligned} \tag{4.2.52}$$

或

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)=&-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{+\infty}n\int_0^{2\pi}u(R,\varphi;t)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}{}'\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial t}(R,\varphi,t)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{+\infty}{}'\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\tau}(R,\varphi;\tau)\cos n(\theta-\varphi)HZ_n'\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\tau\\\equiv&\,\mathcal{K}^1\Big(u(R,\theta,t)\Big),\end{aligned}\tag{4.2.53}$$

或

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)=&-\frac{1}{2\pi R}\sum_{n=0}^{+\infty}{}'\int_0^{2\pi}u(R,\varphi,t)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}{}'\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial t}(R,\varphi;t)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&-\frac{1}{\pi R^2}\sum_{n=0}^{+\infty}{}'\int_0^t\int_0^{2\pi}u(R,\varphi;\tau)\cos n(\theta-\varphi)HZ_n''\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau\\\equiv&\,\mathcal{K}^0\Big(u(R,\theta,t)\Big).\end{aligned}\tag{4.2.54}$$

其中“$'$”表示在求和时对 $n=0$ 项乘上因子 $\frac{1}{2}$。等式 (4.2.52)~(4.2.54) 是初边值问题 (4.2.1)~(4.2.4) 的解 $u(r,\theta,t)$ 在人工边界 Σ_R 上满足的三个等价的准确边界条件，在实际计算中对等式右端的无穷级数进行截断可得到三个等价的高精度近似人工边界条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)=&-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=1}^{N}n\int_0^{2\pi}u(R,\varphi;t)\cos n(\theta-\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&-\frac{1}{\pi R}\sum_{n=0}^{N}{}'\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2u(r,\varphi;\tau)}{\partial\tau^2}\cos n(\theta-\varphi)HZ_n\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\tau\\\equiv&\,\mathcal{K}_N^2\Big(u(R,\theta;t)\Big),\end{aligned}\tag{4.2.55}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)=\mathcal{K}_N^1\Big(u(R,\theta,t)\Big),\tag{4.2.56}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)=\mathcal{K}_N^0\Big(u(R,\theta,t)\Big).\tag{4.2.57}$$

类似于 $\mathcal{K}_N^2$，$\mathcal{K}_N^1$ 和 $\mathcal{K}_N^0$ 是由 $\mathcal{K}^1$ 和 $\mathcal{K}^0$ 截断得到的。

4.2.2 有界计算区域 D_i 上的初边值问题

应用准确边界条件 (4.2.52)~(4.2.54) 中的任何一个, 可将初边值问题 (4.2.1)~(4.2.4) 等价地简化为有界区域 D_i 上的初边值问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(\boldsymbol{x}, t), \quad \forall (\boldsymbol{x}, t) \in D_i, \tag{4.2.58}$$

$$u\big|_{\Gamma} = g(\boldsymbol{x}, t), \quad \forall (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma \times [0, T], \tag{4.2.59}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_i, \tag{4.2.60}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \varphi_1(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_i, \tag{4.2.61}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, t) = \mathcal{K}^j\Big(u(R, \theta, t)\Big), \quad j = 0, 1, 2. \tag{4.2.62}$$

应用近似边界条件 (4.2.55)~(4.2.57) 中的任意一个, 可将原问题 (4.2.1)~(4.2.4) 近似地简化为有界计算区域 D_i 上的初边值问题:

$$\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} = \Delta u^N + f(\boldsymbol{x}, t), \quad \forall (\boldsymbol{x}, t) \in D_i, \tag{4.2.63}$$

$$u^N\big|_{\Gamma} = g(\boldsymbol{x}, t), \quad \forall (\boldsymbol{x}, t) \in \Gamma \times [0, T], \tag{4.2.64}$$

$$u^N\big|_{t=0} = \varphi_0(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_i, \tag{4.2.65}$$

$$u_t^N\big|_{t=0} = \varphi_1(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_i, \tag{4.2.66}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial r}(R, \theta, t) = \mathcal{K}_N^j\Big(u(R, \theta, t)\Big), \quad j = 0, 1, 2. \tag{4.2.67}$$

定理 4.2.2 初边值问题 (4.2.58)~(4.2.62) 至多有一个解, 初边值问题 (4.2.63)~(4.2.67) 至多有一个解。

证明 设 u_1, u_2 是问题 (4.2.58)~(4.2.62) 的解, 令 $E = u_1 - u_2$, 则 E 满足下面的齐次问题:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \Delta E, \quad \forall (x, t) \in D_i, \tag{4.2.68}$$

$$E\big|_{\Gamma} = 0, \quad \forall (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \tag{4.2.69}$$

$$E\big|_{t=0} = 0, \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{4.2.70}$$

$$E_t\big|_{t=0} = 0, \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{4.2.71}$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R} = \mathcal{K}^0(E|_{\Gamma_R}), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{4.2.72}$$

这里取 $j = 0$, 对 $j = 1, 2$ 的情况完全是类似的。

设 u_1^N, u_2^N 是问题 (4.2.63)~(4.2.67) 的两个解, 令 $E^N = u_1^N - u_2^N$, 则 E^N 满足方程和初边值条件 (4.2.68)~(4.2.71), 但在人工边界上 E^N 不满足条件 (4.2.72)

而满足：

$$\frac{\partial E^N}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R} = \mathcal{K}_N^0(E^N|_{\Gamma_R}),\quad 0 < t \leqslant T. \tag{4.2.73}$$

用 $E_t(x,t)$ 乘以方程 (4.2.68) 两端在区域 $\overline{D}_i = \overline{\Omega}_i \times [0,T]$ 上积分。经过分部积分并应用边值和初始条件可得：

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_i}\Big(E_t(x,T)\Big)^2\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{\Omega_i}|\nabla E(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^T\int_{\Gamma_R}\Big(\mathcal{K}^0(E|_{\Gamma_R})\frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{\Gamma_R}\Big)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0. \tag{4.2.74}$$

为了证明

$$-\int_0^T\int_{\Gamma_R}\mathcal{K}^0(E|_{\Gamma_R})\frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{\Gamma_R}\mathrm{d}s\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

在区域 $\Omega_e \times [0,T]$ 上引进辅助函数 $H(x,t)$，$H(x,t)$ 是下面辅助初边值问题的解：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \Delta H,\quad \forall (x,t)\in\Omega_e\times(0,T], \tag{4.2.75}$$

$$H\Big|_{\Gamma_R} = E\Big|_{\Gamma_R},\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.2.76}$$

$$H\Big|_{t=0} = 0,\quad \forall x\in\Omega_e, \tag{4.2.77}$$

$$H_t\Big|_{t=0} = 0,\quad \forall x\in\Omega_e, \tag{4.2.78}$$

对给定的 $E\big|_{\Gamma_R}$，上述问题的解我们已经在 4.2.1 节中求出。它可以表示为下面的傅氏级数形式：

$$H = \frac{g_0(r,t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(g_n(r,t)\cos n\theta + f_n(r,t)\sin n\theta\Big),$$
$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x,t), \tag{4.2.79}$$

其中，

$$h_0(x,t) = \frac{g_0(r,t)}{2},$$

$$h_n(x,t) = g_n(r,t)\cos n\theta + f_n(r,t)\sin n\theta,\quad n = 1,2,\cdots,$$

而且，

$$\frac{\partial H}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R} = \mathcal{K}^0(E|_{\Gamma_R}). \tag{4.2.80}$$

用 H_t 乘以方程 (4.2.75) 两边在 $\overline{\Omega}_e \times [0,T]$ 上积分，通过分部积分可得：

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_{\Gamma_R} \mathcal{K}^0(E|_{\Gamma_R}) \frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{\Gamma_R} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{2}\int_{\Omega_e} (H_t(x,t))^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\Omega_e} |\nabla H(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0. \qquad (4.2.81)
\end{aligned}
$$

由等式 (4.2.74) 和不等式 (4.2.81) 可得：

$$
E(x,t) \equiv 0, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_i \times [0,T].
$$

此外，记：

$$
H_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} h_n(x,t),
$$

则：

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_{\Gamma_R} \mathcal{K}_N^0(E|_{\Gamma_R}) \frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{\Gamma_R} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
=&-\int_0^T \int_{\Gamma_R} \frac{\partial H_N}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R} \frac{\partial H}{\partial t}\Big|_{\Gamma_R} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
=&-\int_0^T \int_{\Gamma_R} \frac{\partial H_N}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R} \frac{\partial H_N}{\partial t}\Big|_{\Gamma_R} \mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{2}\int_{\Omega_e} \big(H_N(x,t)\big)_t^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_{\Omega_e} |\nabla H_N(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \geqslant 0. \qquad (4.2.82)
\end{aligned}
$$

与前面完全类似，可以证明：

$$
E_N(x,t) \equiv 0, \quad \forall (x,t) \in \overline{\Omega}_i \times [0,T].
$$

初边值问题 (4.2.58)~(4.2.62) 和初边值问题 (4.2.63)~(4.2.67) 的唯一性获证。 ■

在有界计算区域 D_i 上可对初边值问题 (4.2.63)~(4.2.67) 进行离散，例如应用差分方法得到问题的数值解 (Han and Zheng, 2005)。

4.3 三维声波方程

在这一节中我们考虑在无界区域 $\Omega \times [0,T]$，($\Omega \subset \mathbb{R}^3$) 上的三维波动方程：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T], \qquad (4.3.1)
$$

$$u\big|_{\Gamma}=g(x,t),\quad \forall(x,t)\in\Gamma\times[0,T], \tag{4.3.2}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \forall x\in\Omega, \tag{4.3.3}$$

$$u_t\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \forall x\in\Omega. \tag{4.3.4}$$

假设 $f(x,t),\varphi_0(x),\varphi_1(x)$ 的支集是紧的，即：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Supp}\big\{f(x,t)\big\}\subset B_0\times[0,T],\ B_0=\Big\{|x|\leqslant R_0\Big\},\\&\mathrm{Supp}\big\{\varphi_0(x)\big\}\subset B_0,\\&\mathrm{Supp}\big\{\varphi_1(x)\big\}\subset B_0.\end{aligned}$$

在 Ω 中引进：

$$\Gamma_R=\Big\{|x|=R,\ R>R_0\Big\}$$

则人工边界 $\Sigma_R=\Gamma_R\times[0,T]$ 将区域 $D=\Omega\times[0,T]$ 分割为有界部分 $D_i=\Omega_i\times[0,T]$ 和无界部分 $D_e=\Omega_e\times[0,T]$，其中 $\Omega_e=\big\{x\big|\ |x|>R\big\}$。

本节的主要目的是在人工边界 Σ_R 上找出三维波动方程的外问题 (4.3.1)~(4.3.4) 的完全吸收边界条件。

4.3.1　人工边界 Σ_R 上的完全吸收边界条件

考虑问题 (4.3.1)~(4.3.4) 的解在区域 D_e 上的限制 u，在极坐标下 u 满足：

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2},$$

$$r>R,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi, \tag{4.3.5}$$

$$u\big|_{\Gamma_R}=u(R,\theta,\varphi,t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4.3.6}$$

$$u\big|_{t=0}=0,\qquad r>R, \tag{4.3.7}$$

$$u_t\big|_{t=0}=0,\qquad r>R. \tag{4.3.8}$$

如果函数 $u(R,\theta,\varphi,t)$ 已知，则可得到边值问题 (4.3.5)~(4.3.8) 解的表达式。将问题 (4.3.5)~(4.3.8) 的解 $u(r,\theta,\varphi,t)$ 展为球调和函数 $\big\{Y_n^m(\theta,\varphi),n\geqslant0,-n\leqslant m\leqslant n\big\}$。即：

$$u(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n}u_n^m(r,t)Y_n^m(\theta,\varphi), \tag{4.3.9}$$

其中，

$$u_n^m(r,t) = \int_{\Gamma_1} u(r,\theta,\varphi,t)\overline{Y}_n^m(\theta,\varphi)\mathrm{d}s, \quad (\Gamma_1\text{为单位球面}). \tag{4.3.10}$$

将 $u(r,\theta,\varphi,t)$ 的表达式 (4.3.9) 代入问题 (4.3.5)~(4.3.8) 可知 $\{u_n^m(r,t),\ n \geqslant 0, -n \leqslant m \leqslant n\}$ 满足：

$$\frac{\partial^2 u_n^m}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^m}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_n^m}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}u_n^m,$$
$$(r,t) \in (R,\infty)\times(0,T], \tag{4.3.11}$$

$$u_n^m\Big|_{r=R} = u_n^m(R,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,, \tag{4.3.12}$$

$$u_n^m\big|_{t=0} = 0, \quad r > R, \tag{4.3.13}$$

$$\left(u_n^m\right)_t\big|_{t=0} = 0, \quad r > R. \tag{4.3.14}$$

为了求解问题 (4.3.11)~(4.3.14)，考虑下面的辅助问题：

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r}G_n,$$
$$(r,t) \in (R,+\infty)\times(0,T], \tag{4.3.15}$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial t}\Big|_{r=R} = 1, \quad t \in (0,T], \tag{4.3.16}$$

$$G_n\big|_{t=0} = 0, \quad r \in (R,+\infty), \tag{4.3.17}$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad r \in (R,+\infty). \tag{4.3.18}$$

对任意 $\mu > 0$，设 $\sin\mu t W(r)$ 是方程 (4.3.15) 的解，则 $W(r)$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} + \left(\mu^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)W = 0, \tag{4.3.19}$$

方程 (4.3.19) 是球 Bessel 方程，它有两个线性无关的解 $h_1(\mu r)$ 和 $h_2(\mu r)$，并且，

$$h_1(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+1/2}(\rho),\ h_2(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}Y_{n+1/2}(\rho).$$

其中 $J_{n+1/2}$ 和 $Y_{n+1/2}$ 是第一类和第二类 Bessel 函数。令：

$$G^*(r,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\mu t}{\mu^2}\frac{h_1(\mu r)h_2(\mu R) - h_1(\mu R)h_2(\mu r)}{h_1^2(\mu R) + h_2^2(\mu R)}\mathrm{d}\mu.$$

通过直接验证可知 $G^*(r,t)$ 是定义于 $[R,+\infty)\times[0,T]$ 上的连续函数，满足方程

(4.3.15)，并且，

$$
\begin{aligned}
G^*(R,t) &= 0, \qquad t \in [0,T], \\
G^*(r,0) &= 0, \qquad r \geqslant R, \\
\frac{\partial G^*(r,0)}{\partial t} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\mu}\frac{h_1(\mu r)h_2(\mu R)-h_1(\mu R)h_2(\mu r)}{h_1^2(\mu R)+h_2^2(\mu R)}\mathrm{d}\mu \\
&= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{r}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mu} \\
&\quad \cdot \frac{J_{n+1/2}(\mu r)Y_{n+1/2}(\mu R)-J_{n+1/2}(\mu R)Y_{n+1/2}(\mu r)}{J_{n+1/2}^2(\mu R)+Y_{n+1/2}^2(\mu R)}\mathrm{d}\mu \\
&= -\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \qquad r > R.
\end{aligned}
$$

最后的等式用到了文献 (Gradshtetn and Kyzhik, 1980,P. 679) 中的积分公式。令：

$$
G(r,t) = G^*(r,t) + \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} t,
$$

则 $G(r,t)$ 是辅助问题 (4.3.15)~(4.3.18) 的解。

由 Duhamel 原理，边值问题 (4.3.11)~(4.3.14) 的解 $u_n^m(r,t)$ 可以由其在边界 Γ_R 上的值 $u_n^m(R,t)$ 和函数 $G(r,t)$ 表示出：

$$
\begin{aligned}
u_n^m(r,t) &= \int_0^t \frac{\partial u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial G(r,t-\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau \\
&= \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} u_n^m(R,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau^2}G^*(r,t-\tau)\mathrm{d}\tau;
\end{aligned}
$$

因而，

$$
\frac{\partial u_n^m(R,t)}{\partial r} = -\frac{n+1}{R}u_n^m(R,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau^2}\frac{\partial G^*(r,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau. \tag{4.3.20}
$$

另一方面，

$$
\frac{\partial G^*(R,t)}{\partial r} = -\frac{4}{\pi^2 R}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\mu t}{\mu^2}\frac{1}{J_{n+1/2}^2(\mu R)+Y_{n+1/2}^2(\mu R)}\mathrm{d}\mu.
$$

引进特殊函数：

$$
HZ_{n+1/2}(t) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\mu t}{\mu^2}\frac{1}{J_{n+1/2}^2(\mu)+Y_{n+1/2}^2(\mu)}\mathrm{d}\mu.
$$

则：

$$
\frac{\partial G^*(R,t)}{\partial r} = -HZ_{n+1/2}\left(\frac{t}{R}\right).
$$

将上式代入 (4.3.20) 可得:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n^m(R,t)}{\partial r}=&-\frac{n+1}{R}u_n^m(R,t)-\int_0^t\frac{\partial^2 u_n^m(R,\tau)}{\partial\tau^2}HZ_{n+1/2}\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau.\\ \equiv&\mathcal{K}_n^2(u_n^m)\end{aligned}\tag{4.3.21}$$

可将特殊函数 $HZ_{n+1/2}(t)$ 改写为下面的等价形式:

$$HZ_{n+1/2}(t)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\mu t}{\mu^2}\Big(\frac{1}{J_{n+1/2}^2(\mu)+Y_{n+1/2}^2(\mu)}-\frac{\pi}{2}\mu\Big)\mathrm{d}\mu+1,$$

可直接验证特殊函数 $HZ_{n+1/2}(t)$ 是两次连续可微的，并且,

$$\begin{aligned}&HZ'_{n+1/2}(t)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\mu t}{\mu}\Big(\frac{1}{J_{n+1/2}^2(\mu)+Y_{n+1/2}^2(\mu)}-\frac{\pi}{2}\Big)\mathrm{d}\mu,\\ &HZ''_{n+1/2}(t)=-\frac{4}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\sin\mu t\Big(\frac{1}{J_{n+1/2}^2(\mu)+Y_{n+1/2}^2(\mu)}-\frac{\pi}{2}\Big)\mathrm{d}\mu,\\ &HZ_{n+1/2}(+0)=1,\\ &HZ'_{n+1/2}(+0)=-n.\end{aligned}$$

其中最后一个等式是一个猜想，仅通过数值计算进行了验证。应用上述特殊函数 $HZ_{n+1/2}(t)$ 的性质，对等式 (4.3.21) 右端的积分分部积分可得等式 (4.3.21) 的两个等价形式:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n^m}{\partial r}(R,t)=&-\frac{(n+1)}{R}u_n^m(R,t)-\frac{\partial u_n^m(R,t)}{\partial t}\\ &-\frac{1}{R}\int_0^t\frac{\partial u_n^m(R,\tau)}{\partial\tau}HZ'_{n+1/2}\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau\\ \equiv&\mathcal{K}_n^1\big(u_n^m(R,t)\big)\end{aligned}\tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n^m}{\partial r}(R,t)=&-\frac{1}{R}u_n^m(R,t)-\frac{\partial u_n^m(R,t)}{\partial t}\\ &-\frac{1}{R^2}\int_0^t u_n^m(R,\tau)HZ''_{n+1/2}\Big(\frac{t-\tau}{R}\Big)\mathrm{d}\tau\\ \equiv&\mathcal{K}_n^0\big(u_n^m(R,t)\big).\end{aligned}\tag{4.3.23}$$

由 (4.3.9) 可知原问题 (4.3.1)~(4.3.4) 的解 $u(r,\theta,\varphi,t)$ 在人工边界 Σ_R 上满足下面三个等价的边界条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,\varphi,t)=&\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n}\mathcal{K}_n^j\big(u_n^m(R,t)\big)Y_n^m(\theta,\varphi),\\ \equiv&\mathcal{K}^j\Big(u(R,\theta,\varphi,t)\Big),\quad j=0,1,2,\end{aligned}\tag{4.3.24}$$

在实际计算时，对边界条件 (4.3.24) 中的无穷级数进行截断，取前面 N 项，可得近似人工边界条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,\varphi,t)=&\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}\mathcal{K}_n^j\big(u_n^m(R,t)Y_n^m(\theta,\varphi)\big)\\ \equiv&\mathcal{K}_N^j\Big(u(R,\theta,\varphi,t)\Big),\quad j=0,1,2.\end{aligned}\tag{4.3.25}$$

对 $j=0,1,2$，近似边界条件 (4.3.25) 中的三个公式是相互等价的。

4.3.2　有界计算区域 D_i 上的等价和近似初边值问题

应用准确边界条件 (4.3.24) 中的任何一个可将原问题 (4.3.1)~(4.3.4) 简化为有界计算区域 D_i 上的等价初边值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u+f(x,t),\quad \forall(x,t)\in D_i,\tag{4.3.26}$$

$$u\big|_{\Gamma}=g(x,t),\quad \forall(x,t)\in \Gamma\times[0,T],\tag{4.3.27}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \forall x\in\Omega_i,\tag{4.3.28}$$

$$u_t\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \forall x\in\Omega_i,\tag{4.3.29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t)=\mathcal{K}^j\Big(u(R,\theta,t)\Big),\ j=0,1,2.\tag{4.3.30}$$

应用近似边界条件 (4.3.25) 可将原问题 (4.3.1)~(4.3.4) 近似地简化为有界计算区域 D_i 上的近似初边值问题：

$$\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}=\Delta u^N+f(x,t),\quad \forall(x,t)\in D_i,\tag{4.3.31}$$

$$u^N\big|_{\Gamma}=g(x,t),\quad \forall(x,t)\in \Gamma\times[0,T],\tag{4.3.32}$$

$$u^N\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\ \forall x\in\Omega_i,\tag{4.3.33}$$

$$u_t^N\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\ \forall x\in\Omega_i,\tag{4.3.34}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial r}(R,\theta,t)=\mathcal{K}_N^j\Big(u(R,\theta,t)\Big),\ j=0,1,2.\tag{4.3.35}$$

对上述初边值问题有下面的唯一性定理：

定理 4.3.1　初边值问题 (4.3.26)~(4.3.30) 至多有一个解，初边值问题 (4.3.31)~(4.3.35) 至多有一个解。 ■

定理的证明与二维情况完全类似，这里不再重复。

由初边值问题 (4.3.31)~(4.3.35) 出发，例如应用差分方法可得到原问题在有界计算区域 D_i 上的数值近似解，在论文 (Han and Zheng, 2003) 中给出的数值例子说明本节给出的人工边界条件是十分有效的。

4.4 一维 Klein-Gordon 方程

在本节我们研究下面一维 Klein-Gordon 方程初值问题的数值解：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u = f(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [0,T], \tag{4.4.1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{4.4.2}$$

其中 a, b 是两个正实数；已知函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), f(x,t)$ 满足 4.1 节中的条件。由于 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 的支集在 $[0,1]$ 中，$f(x,t)$ 的支集在 $[0,1]\times[0,T]$ 中，引进人工边界

$$\Sigma_1 = \Big\{(x,t) \mid x = 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\},$$

$$\Sigma_0 = \Big\{(x,t) \mid x = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\}.$$

人工边界 Σ_1, Σ_0 将无界区域 $R^1 \times [0,T]$ 分割为三部分：

$$D_i = [0,1] \times [0,T],$$

$$D_1 = [1,+\infty) \times [0,T],$$

$$D_0 = (-\infty, 0] \times [0,T],$$

其中 D_i 是有界区域。

4.4.1 人工边界 Σ_1, Σ_0 上的完全吸收边界条件

考虑初值问题 (4.4.1)~(4.4.2) 的解 $u(x,t)$ 在区域 D_1 上的限制，在 D_1 上 $u(x,t)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u = 0, \quad \forall\ (x,t) \in D_1, \tag{4.4.3}$$

$$u\big|_{\Sigma_1} = u(1,t) \equiv g_1(t), \quad 0 \leqslant t\ \leqslant T, \tag{4.4.4}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad 1 < x < +\infty. \tag{4.4.5}$$

由于 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_1 上的值 $u(1,t)$ 是未知的，问题 (4.4.3)~(4.4.5) 的提法是不完全的，不能独立求解。假设 $u\big|_{\Sigma_1} \equiv g_1(t)$ 已知，则问题 (4.4.3)~(4.4.5) 存在唯一解，应用 Laplace 变换可求出问题 (4.4.3)~(4.4.5) 的解。令：

$$\widehat{u}(x,s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} u(x,t)\mathrm{d}t \equiv \mathcal{L}\big(u(x,t)\big). \tag{4.4.6}$$

由微分方程 (4.4.3) 和初边值条件 (4.4.4)~(4.4.5) 可知 $\widehat{u}(x,s)$ 满足：

$$s^2\widehat{u} - a^2\frac{d^2\widehat{u}}{dx^2} + b^2\widehat{u} = 0,\quad 1 < x < +\infty, \tag{4.4.7}$$

$$\widehat{u}(1,s) = \widehat{g}_1(s),\quad \widehat{u}(x,s)\ \text{有界}. \tag{4.4.8}$$

方程 (4.4.7) 是一个二阶常微分方程，通解为：

$$\widehat{u}(x,t) = C_1(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{a}(x-1)} + C_2(s)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{a}(x-1)},$$

由 $\widehat{u}(x,s)$ 有界，可知 $C_2(s) = 0$，即：

$$\widehat{u}(x,s) = C_1(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{a}(x-1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{u}(x,s)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{a}C_1(s)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{a}(x-1)}.$$

在人工边界 Σ_1 上我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\widehat{u}(1,s)}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\sqrt{s^2+b^2}}{a}\widehat{u}(1,s)\\ &= -\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{s^2+b^2}}\big(s^2\widehat{u}(1,s) + b^2\widehat{u}(1,s)\big).\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

由 Laplace 变换表 (Gradsbteyn and Kyzhik, 2004, P. 118) 可得：

$$\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{s^2+b^2}}\Big) = J_0(bt),$$

和

$$\mathcal{L}^{-1}\big(s^2\widehat{u}(1,s) + b^2\widehat{u}(1,s)\big) = \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial t^2} + b^2u(1,t).$$

再应用卷积定理由 (4.4.9) 得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} &= -\frac{1}{a}\int_0^t J_0\big(b(t-\tau)\big)\Big[\frac{\partial^2 u(1,\tau)}{\partial \tau^2} + b^2u(1,\tau)\Big]\mathrm{d}\tau\\ &= -\frac{1}{a}\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} - \frac{b}{a}\int_0^t J_0'\big(b(t-\tau)\big)\frac{\partial u}{\partial \tau}(1,\tau)\mathrm{d}\tau\\ &\quad -\frac{b^2}{a}\int_0^t J_0\big(b(t-\tau)\big)u(1,\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= -\frac{1}{a}\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} - \frac{b^2}{a}\int_0^t \Big[J_0''\big(b(t-\tau)\big) + J_0\big(b(t-\tau)\big)\Big]u(1,\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

即有：

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u(1,t)}{\partial t} = -\frac{b^2}{a}\int_0^t \Big[J_0''\big(b(t-\tau)\big) + J_0\big(b(t-\tau)\big)\Big]u(1,\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.4.10}$$

边界条件 (4.4.10) 是初值问题 (4.4.1)~(4.4.2) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_1 上满足的准确边界条件。通过类似的分析在人工边界 Σ_0 上可得到准确边界条件：

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\frac{b^2}{a}\int_0^t\Big[J_0''\big(b(t-\tau)\big)+J_0\big(b(t-\tau)\big)\Big]u(0,\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (4.4.11)$$

边界条件 (4.4.10) 和 (4.4.11) 可将区域 D_i 上的波完全传播出去，称其为一维 Klein-Gordon 方程的完全吸收边界条件。

4.4.2 有界计算区域 D_i 上的初边值问题

应用完全吸收边界条件(4.4.10) 和 (4.4.11) 可将初值问题 (4.4.1)~(4.4.2) 等价地简化为有界计算区域 D_i 上的初边值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2u=f(x,t),\quad \forall\ (x,t)\in D_i, \quad (4.4.12)$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial u(1,t)}{\partial t}=-\frac{b^2}{a}\int_0^t\Big[J_0''\big(b(t-\tau)\big)+J_0\big(b(t-\tau)\big)\Big]u(1,\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (4.4.13)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\frac{b^2}{a}\int_0^t\Big[J_0''\big(b(t-\tau)\big)+J_0\big(b(t-\tau)\big)\Big]u(0,\tau)\mathrm{d}\tau, \quad (4.4.14)$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \forall x\in[0,1]. \quad (4.4.15)$$

由上述分析可知若 $u(x,t)$ 是原问题 (4.4.1)~(4.4.2) 的解，则 $u(x,t)$ 在区域 D_i 上的限制是初边值问题 (4.4.12)~(4.4.15) 的解。进一步我们将证明问题 (4.4.12)~(4.4.15) 解的唯一性与解对初值 $\varphi_0(x),\varphi_1(x)$ 及方程右端 $f(x,t)$ 的连续依赖性。

以 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 乘以方程 (4.4.12) 两边，在区域 D_i 上对变量 x 积分并应用边界条件 (4.4.13) 和 (4.4.14) 可得：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\Big[\Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big)^2+a^2\Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big)^2+b^2\big(u(x,t)\big)^2\Big]\mathrm{d}x\right\}\\&+a^2\frac{\partial u(1,t)}{\partial t}\mathcal{J}\big(u(1,t)\big)+a^2\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}\mathcal{J}\big(u(0,t)\big)\\=&\int_0^1 f(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x,\end{aligned} \quad (4.4.16)$$

其中，

$$\mathcal{J}\big(v(t)\big)=\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{b^2}{a}\int_0^t\Big[J_0''\big(b(t-\tau)\big)+J_0\big(b(t-\tau)\big)\Big]v(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

为分析等式 (4.4.16) 左端的最后两项，分别在区域 $D_1 = [1, +\infty) \times [0, T]$ 和 $D_0 = (-\infty, 0] \times [0, T]$ 上引进辅助函数 $w_1(x,t), w_0(x,t)$：

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + b^2 w_1 = 0, \quad \forall\ (x,t) \in D_1, \tag{4.4.17}$$

$$w_1\big|_{x=1} = u(1,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.4.18}$$

$$w_1\big|_{t=0} = 0, \quad (w_1)_t\big|_{t=0} = 0, \quad 1 < x < +\infty. \tag{4.4.19}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + b^2 w_0 = 0, \quad \forall\ (x,t) \in D_0, \tag{4.4.20}$$

$$w_0\big|_{x=0} = u(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.4.21}$$

$$w_0\big|_{t=0} = 0, \quad (w_0)_t\big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x < 0. \tag{4.4.22}$$

通过类似的分析可得：

$$a^2 \frac{\partial u(1,t)}{\partial t} \mathcal{J}\big(u(1,t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \Big[\Big(\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial t}\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x}\Big)^2 + b^2\big(w_1(x,t)\big)^2\Big]\mathrm{d}x\Big\}, \tag{4.4.23}$$

$$a^2 \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \mathcal{J}\big(u(0,t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \Big[\Big(\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial t}\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x}\Big)^2 + b^2\big(w_0(x,t)\big)^2\Big]\mathrm{d}x\Big\}. \tag{4.4.24}$$

综合等式 (4.4.16)，(4.4.23)～(4.4.24) 可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) \leqslant E(t) + F(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中，

$$\begin{aligned} E(t) = &\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \Big[\Big(\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial t}\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial w_0(x,t)}{\partial x}\Big)^2 + b^2\Big(w_0(x,t)\Big)^2\Big]\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \Big[\Big(\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial t}\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x}\Big)^2 + b^2\Big(w_1(x,t)\Big)^2\Big]\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)^2 + a^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)^2 \\ &+ b^2\Big(u(x,t)\Big)^2\Big]\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

$$F(t)=\frac{1}{b^2}\int_0^1\big(f(x,t)\big)^2\mathrm{d}x. \tag{4.4.26}$$

应用 Gronwall 不等式可得：

$$E(t)\leqslant \mathrm{e}^t\Big(E(0)+\int_0^t F(\tau)\mathrm{d}\tau\Big),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4.4.27}$$

又有：

$$E(0)=\frac{1}{2}\int_0^1\Big[\big(\varphi_1(x)\big)^2+a^2\big(\varphi_0'(x)\big)^2+b^2\big(\varphi_0(x)\big)^2\Big]\mathrm{d}x, \tag{4.4.28}$$

由不等式 (4.4.27) 可立刻得到初边值问题 (4.4.12)~(4.4.15) 解的稳定性估计：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^1\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big)^2+a^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)^2+b^2\big(u(x,t)\big)^2\Big]\mathrm{d}x\\ \leqslant&\,\mathrm{e}^t\bigg\{\int_0^1\frac{1}{2}\Big[\big(\varphi_1(x)\big)^2+a^2\big(\varphi_0'(x)\big)^2+b^2\big(\varphi_0(x)\big)^2\Big]\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{b^2}\int_0^t\int_0^1\big(f(x,\tau)\big)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\bigg\}.\end{aligned} \tag{4.4.29}$$

对有界计算区域 D_i 上的初边值问题 (4.4.12)~(4.4.15) 有下面的结果：

定理 4.4.1 初边值问题 (4.4.12)~(4.4.15) 至多有一个解，而且稳定性估计 (4.4.29) 式成立。 ■

事实上我们已经证明了在有界计算区域 D_i 上，初边值问题 (4.4.12)~(4.4.15) 与原问题 (4.4.1)~(4.4.2) 等价。

4.5 高维 Klein-Gordon 方程

在这一节中研究高维 Klein-Gordon 方程的完全吸收人工边界条件。为了叙述上的简练，在方程中取常数 $a=1,b=1$，考虑下面的初值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u+u=f(x,t),\quad \forall\ (x,t)\in\mathbb{R}^d\times(0,T], \tag{4.5.1}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad u_t\big|_{t=0}=\varphi_1(x),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^d, \tag{4.5.2}$$

其中 $d=2,3$。假设函数 $\varphi_0(x),\varphi_1(x),f(x,t)$ 满足：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Supp}\{\varphi_0(x)\}\subset B_0=\{x\mid |x|\leqslant R_0\},\\&\mathrm{Supp}\{\varphi_1(x)\}\subset B_0,\\&\mathrm{Supp}\{f(x,t)\}\subset B_0\times[0,T],\end{aligned}$$

其中 $R_0 > 0$。在 $\mathbb{R}^d$ 上引进人工边界：

$$\Gamma_R = \{x \mid |x| = R,\ R > R_0\},$$

则 Γ_R 将 $\mathbb{R}^d$ 分割为有界区域 $\Omega_i = \{x \mid |x| < R\}$ 和无界区域 $\Omega_e = \{x \mid |x| > R\}$。为了将原问题 (4.5.1)~(4.5.2) 简化在有界计算区域 $D_i = \Omega_i \times [0,T]$ 上进行数值计算，我们必须研究人工边界 $\Sigma_R = \Gamma_R \times [0,T]$ 上的人工边界条件。

4.5.1　人工边界 Σ_R 上的完全吸收人工边界条件 (二维问题)

当 $d=2$ 时首先考虑问题 (4.5.1)~(4.5.2) 的解 $u(x,t)$ 在 $\Omega_e \times [0,T]$ 上的限制，$u(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u = 0, \quad \forall\ (x,t) \in \Omega_e \times (0,T], \tag{4.5.3}$$

$$u\big|_{\Sigma_R} = u(R,\theta,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{4.5.4}$$

$$u\big|_{t=0} = 0,\ u_t\big|_{t=0} = 0, \quad R < r < +\infty. \tag{4.5.5}$$

若 $u|_{\Gamma_R} = u(R,\theta,t)$ 已知，则问题 (4.5.3)~(4.5.5) 存在唯一解，我们将通过求出问题 (4.5.3)~(4.5.5) 的解 $u(r,\theta,t)$ 的表达式，得到在人工边界 Σ_R 上的完全吸收人工边界条件。将问题 (4.5.3)~(4.5.5) 的解展开为：

$$u(r,\theta,t) = \frac{u_0(r,t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\big(u_n(r,t)\cos n\theta + v_n(r,t)\sin n\theta\big), \tag{4.5.6}$$

将 (4.5.6) 代入方程 (4.5.3) 并应用边界条件 (4.5.4) 和初值条件 (4.5.5) 可得 $\{u_n(r,t),\ n=0,1,2,\cdots\}$ 和 $\{v_n(r,t),\ n=1,2,\cdots\}$ 是下面初边值问题的解：

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \Big(\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}u_n\Big) + u_n = 0, \quad R < r < +\infty,\ \ 0 < t \leqslant T, \tag{4.5.7}$$

$$u_n|_{r=R} = \alpha_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.5.8}$$

$$u_n|_{t=0} = 0, \quad (u_n)_t|_{t=0} = 0, \quad R < r < +\infty. \tag{4.5.9}$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - \Big(\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}v_n\Big) + v_n = 0, \quad R < r < +\infty,\ \ 0 < t \leqslant T, \tag{4.5.10}$$

$$v_n|_{r=R} = \beta_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.5.11}$$

$$v_n|_{t=0} = 0, \quad (v_n)_t|_{t=0} = 0, \quad R < r < +\infty. \tag{4.5.12}$$

其中

$$\alpha_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta,t)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=0,1,\cdots,\tag{4.5.13}$$

$$\beta_n(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta,t)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,\cdots,\tag{4.5.14}$$

为了求解边值问题 (4.5.7)~(4.5.9) 和问题 (4.5.10)~(4.5.12)，首先求解下面的辅助问题：

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial t^2}-\Big(\frac{\partial^2 G_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial G_n}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}G_n\Big)+G_n=0,$$
$$R<r<+\infty,\quad 0<t\leqslant T,\tag{4.5.15}$$

$$G_n|_{r=R}=1,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{4.5.16}$$

$$G_n|_{t=0}=0,\quad (G_n)_t|_{t=0}=0,\quad R<r<+\infty.\tag{4.5.17}$$

令：

$$G_n(r,t)=\sin(\sqrt{(\omega^2+1)}\ t)W(r),\tag{4.5.18}$$

其中 $\omega>0$ 为任意实数。将 (4.5.18) 代入方程 (4.5.15) 可知 $W(r)$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}+\Big(\omega^2-\frac{n^2}{r^2}W\Big)=0,\tag{4.5.19}$$

方程 (4.5.19) 是 n 阶 Bessel 方程，它有两个线性无关的解 $J_n(\omega r),Y_n(\omega r)$ (Andrews ,1992, P. 287)。因而对任意 $\omega>0$ 函数

$$\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\frac{J_n(\omega r)Y_n(\omega R)-Y_n(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}$$

都是方程 (4.5.15) 的解，令：

$$G_n^*(r,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\frac{J_n(\omega r)Y_n(\omega R)-Y_n(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega\tag{4.5.20}$$

类似于在 4.2 节中的讨论，可知 $G_n^*(r,t)$ 是方程 (4.5.15) 的一个解，并且，

$$\begin{aligned}
&G_n^*(R,t)=0,\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\\
&G_n^*|_{t=0}=0,\\
&(G_n^*)_t|_{t=0}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{\omega^2+1}\frac{J_n(\omega r)Y_n(\omega R)-Y_n(\omega r)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega\\
&\qquad\qquad=-\frac{K_n(r)}{K_n(R)},\qquad R<r<+\infty,
\end{aligned}$$

其中 $K_n(r)$ 是 n 阶虚变量 Bessel 函数，最后的等式来源于本章附录中的等式 (4.7.3)。

注意到函数 $t\dfrac{K_n(r)}{K_n(R)}$ 也是方程 (4.5.15) 的解，令：

$$G_n(r,t)=t\frac{K_n(r)}{K_n(R)}+G_n^*(r,t), \tag{4.5.21}$$

则 $G_n(r,t)$ 是初边值问题 (4.5.15)~(4.5.17) 的解。应用 Duhamel 原理由 $G_n(r,t)$ 可得问题 (4.5.7)~(4.5.9) 的解 $u_n(r,t)$ 和问题 (4.5.10)~(4.5.12) 的解 $v_n(r,t)$：

$$\begin{aligned}u_n(r,t)&=\int_0^t\frac{\partial\alpha_n(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial G_n(r,t-\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{K_n(r)}{K_n(R)}\alpha_n(t)+\int_0^t\frac{\partial^2\alpha_n(\tau)}{\partial\tau^2}G_n^*(r,t-\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.5.22}$$

$$\begin{aligned}v_n(r,t)&=\int_0^t\frac{\partial\beta_n(\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial G_n(r,t-\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{K_n(r)}{K_n(R)}\beta_n(t)+\int_0^t\frac{\partial^2\beta_n(\tau)}{\partial\tau^2}G_n^*(r,t-\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

在边界 $r=R$ 上：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n(R,t)}{\partial r}&=\frac{K_n'(R)}{K_n(R)}\alpha_n(R,t)+\int_0^t\frac{\partial^2\alpha_n(\tau)}{\partial\tau^2}\frac{\partial G_n^*(R,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{K_n'(R)}{K_n(R)}u_n(R,t)+\int_0^t\frac{\partial^2u_n(R,\tau)}{\partial\tau^2}\frac{\partial G_n^*(R,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

$$\frac{\partial v_n(R,t)}{\partial r}=\frac{K_n'(R)}{K_n(R)}v_n(R,t)+\int_0^t\frac{\partial^2v_n(R,\tau)}{\partial\tau^2}\frac{\partial G_n^*(R,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau. \tag{4.5.25}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_n^*(R,t)}{\partial r}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\\&\quad\cdot\frac{J_n'(\omega R)Y_n(\omega R)-Y_n'(\omega R)J_n(\omega R)}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{4}{R\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\frac{1}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega\\&\equiv-HY_{n,R}(t),\end{aligned} \tag{4.5.26}$$

其中，

$$HY_{n,R}(t) = \frac{4}{R\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\frac{1}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega. \tag{4.5.27}$$

对任意 $t>0$，积分 (4.5.27) 是收敛的，因而由 (4.5.27) 定义了一类新的特殊函数 $HY_{n,R}(t)$。函数 $HY_{n,R}(t)$ 可以改写为下面的等价形式：

$$\begin{aligned}HY_{n,R}(t) = &\frac{4}{R\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\left\{\frac{1}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\right.\\&\left.-\frac{\pi}{2}R\sqrt{\omega^2+1}\right\}\mathrm{d}\omega+\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{\omega^2+1}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{4.5.28}$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{\omega^2+1}\mathrm{d}\omega &= \frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\xi t}{\xi}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\xi t}{\xi}\mathrm{d}\xi-\int_0^1\frac{\sin\xi t}{\xi}\mathrm{d}\xi\right)\\&=1-\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi.\end{aligned} \tag{4.5.29}$$

综合等式 (4.5.28)~(4.5.29) 可得：

$$\begin{aligned}HY_{n,R}(t) = &\frac{4}{R\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\left\{\frac{1}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\right.\\&\left.-\frac{\pi}{2}R\sqrt{\omega^2+1}\right\}\mathrm{d}\omega+1-\frac{2}{\pi}\int_0^t\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{4.5.30}$$

由上式可得 $HY_{n,R}(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上对 t 是可微的，而且，

$$\begin{aligned}HY'_{n,R}(t) = &\frac{4}{R\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\cos((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)}\left\{\frac{1}{J_n^2(\omega R)+Y_n^2(\omega R)}\right.\\&\left.-\frac{\pi}{2}R\sqrt{\omega^2+1}\right\}\mathrm{d}\omega-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin t}{t}-1\right).\end{aligned} \tag{4.5.31}$$

可应用公式 (4.5.30)~(4.5.31) 计算特殊函数 $HY_{n,R}(t)$ 和 $HY'_{n,R}(t)$。将式 (4.5.26) 代入式 (4.5.24) 可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_n(R,t)}{\partial r} &= \frac{K'_n(R)}{K_n(R)}u_n(R,t)-\int_0^t\frac{\partial^2 u_n(R,\tau)}{\partial\tau^2}HY_{n,R}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{K'_n(R)}{K_n(R)}u_n(R,t)-\frac{\partial u_n(R,t)}{\partial t}-\int_0^t\frac{\partial u_n(R,\tau)}{\partial\tau}HY'_{n,R}(t-\tau)\mathrm{d}\tau;\end{aligned} \tag{4.5.32}$$

类似地对 $v_n(r,t)$ 可得:

$$\frac{\partial v_n(R,t)}{\partial r}=\frac{K_n'(R)}{K_n(R)}v_n(R,t)-\frac{\partial v_n(R,t)}{\partial t}-\int_0^t\frac{\partial v_n(R,\tau)}{\partial \tau}HY_{n,R}'(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.5.33}$$

公式 (4.5.32)~(4.5.33) 是函数 $u_n(r,t)$, $v_n(r,t)$ 在人工边界 $r=R$ 上满足的准确边界条件。

综合公式 (4.5.6)、(4.5.32)~(4.5.33) 我们得到二维 Klein-Gordon 问题 (4.5.1) ~(4.5.2) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 $\Sigma_R=\Gamma_R\times[0,T]$ 上满足的完全吸收人工边界条件。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial r}=&-\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial t}+\sum_{n=0}^{+\infty}\Big\{\frac{K_n'(R)}{K_n(R)}\big(u_n(R,t)\cos n\theta+v_n(R,t)\sin n\theta\big)\\&-\int_0^t\Big(\frac{\partial u_n(R,\tau)}{\partial\tau}\cos n\theta+\frac{\partial v_n(R,\tau)}{\partial\tau}\Big)HY_{n,R}'(t-\tau)\mathrm{d}\tau\Big\},\\=&-\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial t}+\sum_{n=0}^{+\infty}\Big\{\frac{K_n'(R)}{\pi K_n(R)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi,t)\cos n(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi\\&-\frac{1}{\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi,\tau)}{\partial\tau}\cos n(\varphi-\theta)HY_{n,R}'(t-\tau)\mathrm{d}\tau\Big\}\\\equiv&\,\mathcal{K}^2\big(u(R,\theta,t)\big).\end{aligned} \tag{4.5.34}$$

公式 (4.5.34) 右端包含无穷级数。在实际计算中常常将级数截断只选取有限项, 这样就得到近似的吸收人工边界条件。这时要注意的是对右端项 $\dfrac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial t}$, 必须将它展开为傅氏级数并同时进行截断。这样我们得到一系列近似的吸收人工边界条件 $(N=1,2,\cdots)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial r}=&-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi,t)}{\partial t}\cos n(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi\\&+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\Big\{\frac{K_n'(R)}{K_n(R)}\int_0^{2\pi}u(R,\varphi,t)\cos n(\varphi-\theta)\mathrm{d}\varphi\\&-\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(R,\varphi,\tau)}{\partial\tau}\cos n(\varphi-\theta)HY_{n,R}'(t-\tau)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\tau\Big\}\\\equiv&\,\mathcal{K}_N^2\big(u(R,\theta,t)\big).\end{aligned} \tag{4.5.35}$$

4.5.2 人工边界 Σ_R 上的完全吸收人工边界条件 (三维问题)

当 $d=3$ 时, 考虑问题 (4.5.1)~(4.5.2) 的解 u 在区域 $\Omega_e\times[0,T]$ 上的限制,

在球坐标下 u 满足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}$$

$$+u = 0, \quad R < r, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{4.5.36}$$

$$u|_{\Gamma_R} = u(R, \theta, \varphi, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.5.37}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad R < r < +\infty. \tag{4.5.38}$$

如果函数 $u(R,\theta,\varphi,t)$ 已知，则问题 (4.5.36)~(4.5.38) 是唯一可解的。将问题 (4.5.36)~(4.5.38) 的解展开为球调和函数 $\{Y_n^m(\theta,\varphi),\ n \geqslant 0,\ -n \leqslant m \leqslant n\}$，即：

$$u(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} u_n^m(r,t) Y_n^m(\theta,\varphi), \tag{4.5.39}$$

其中，

$$u_n^m(r,t) = \int_{\Gamma_1} u(r,\theta,\varphi,t)\overline{Y}_n^m(\theta,\varphi)\mathrm{d}s, \ (\Gamma_1\text{为单位球面}). \tag{4.5.40}$$

将 (4.5.39) 代入方程 (4.5.36) 和初边值条件 (4.5.37)~(4.5.38) 可得 $\{u_n^m(r,t),\ n \geqslant 0,\ -n \leqslant m \leqslant n\}$ 满足：

$$\frac{\partial^2 u_n^m}{\partial t^2} - \left\{\frac{\partial u_n^m}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_n^m}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}u_n^m\right\} + u_n^m = 0,$$
$$\forall (r,t) \in (R,+\infty)\times(0,T]. \tag{4.5.41}$$

$$u_n^m|_{r=R} = u_n^m(R,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.5.42}$$

$$u_n^m|_{t=0} = 0, \quad (u_n^m)|_{t=0} = 0, \quad R < r < +\infty. \tag{4.5.43}$$

为了给出初边值问题 (4.5.41)~(4.5.43) 解的表达式，考虑下面的辅助问题：

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial t^2} - \left\{\frac{\partial H_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial H_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}H_n\right\} + H_n = 0,$$
$$\forall (r,t) \in (R,+\infty)\times(0,T]. \tag{4.5.44}$$

$$\left.\frac{\partial H_n}{\partial t}\right|_{r=R} = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.5.45}$$

$$H_n|_{t=0} = 0, \quad (H_n)_t|_{t=0} = 0, \quad R < r < +\infty. \tag{4.5.46}$$

对任意 $\omega > 0$，设 $\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)W(r)$ 为方程 (4.5.44) 的解，则函数 $W(r)$ 满足：

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} + \left(\omega^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)W = 0. \tag{4.5.47}$$

方程 (4.5.47) 是球 Bessel 方程，有两个线性无关的解 $h_1(\omega r)$ 和 $h_2(\omega r)$，这里，

$$h_1(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+1/2}(\rho),\quad h_2(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}Y_{n+1/2}(\rho). \tag{4.5.48}$$

令：

$$H_n^*(r,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin((\sqrt{\omega^2+1})t)}{(\omega^2+1)^{3/2}}\frac{h_1(\omega r)h_2(\omega R)-h_1(\omega R)h_2(\omega r)}{h_1^2(\omega R)+h_2^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega. \tag{4.5.49}$$

对于 $(r,t)\in[R,+\infty)\times[0,T]$，积分 (4.5.49) 收敛，$H_n^*(r,t)$ 是方程 (4.5.44) 的解，而且，

$$\begin{aligned}
&H_n^*(R,t)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\\
&H_n^*(r,0)=0,\quad R\leqslant r<+\infty.\\
\frac{\partial H_n^*(r,0)}{\partial t}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{\omega^2+1}\frac{h_1(\omega r)h_2(\omega R)-h_1(\omega R)h_2(\omega r)}{h_1^2(\omega R)+h_2^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{R}{r}}\int_0^{+\infty}\frac{\omega}{\omega^2+1}\\
&\quad\cdot\frac{J_{n+1/2}(\omega r)Y_{n+1/2}(\omega R)-J_{n+1/2}(\omega R)Y_{n+1/2}(\omega r)}{J_{n+1/2}^2(\omega R)+Y_{n+1/2}^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega\\
&=-\sqrt{\frac{R}{r}}\frac{K_{n+1/2}(r)}{K_{n+1/2}(R)}.
\end{aligned}$$

最后的等式来源于本章附录中的公式 (4.7.3)。令：

$$L_{n+1/2}(r)=\frac{K_{n+1/2}(r)}{\sqrt{r}},$$

则 $L_{n+1/2}(r)$ 满足微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2L_{n+1/2}}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}L_{n+1/2}}{\mathrm{d}r}-\left(1+\frac{n(n+1)}{r^2}\right)L_{n+1/2}=0, \tag{4.5.50}$$

即 $L_{n+1/2}(r)$ 是方程 (4.5.50) 的一个特解，并且，

$$\frac{\partial H_n^*(r,0)}{\partial t}=-\frac{L_{n+1/2}(r)}{L_{n+1/2}(R)}.$$

令：

$$H_n(r,t)=t\frac{L_{n+1/2}(r)}{L_{n+1/2}(R)}+H_n^*(r,t) \tag{4.5.51}$$

则 $H_n(r,t)$ 是初边值问题 (4.5.44)~(4.5.46) 的解。应用 Duhamal 原理和函数 $H_n(r,t)$ 可将初边值问题 (4.5.41)~(4.5.43) 的解 $u_n^m(r,t)$ 表示出来。

$$\begin{aligned} u_n^m(r,t) &= \int_0^t \frac{\partial u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau}\frac{\partial H_n(r,t-\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{L_{n+1/2}(r)}{L_{n+1/2}(R)}u_n^m(R,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau^2}H_n^*(r,t-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.5.52}$$

在边界 $r=R$ 上：

$$\frac{\partial u_n^m(R,t)}{\partial r} = \frac{L'_{n+1/2}(R)}{L_{n+1/2}(R)}u_n^m(R,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau^2}\frac{\partial H_n^*(R,t-\tau)}{\partial r}\mathrm{d}\tau. \tag{4.5.53}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n^*(R,t)}{\partial r} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega^2\sin(\sqrt{(\omega^2+1)})t}{(\omega^2+1)^{3/2}} \\ &\quad \cdot \frac{J'_{n+\frac{1}{2}}(\omega R)Y_{n+\frac{1}{2}}(\omega R) - J_{n+\frac{1}{2}}(\omega R)Y'_{n+\frac{1}{2}}(\omega R)}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\omega R) + Y^2_{n+\frac{1}{2}}\omega R}\mathrm{d}\omega \\ &= -\frac{4}{\pi^2 R}\int_0^{+\infty} \frac{\omega\sin(\sqrt{(\omega^2+1)}t)}{(\omega^2+1)}\frac{1}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\omega R) + Y^2_{n+\frac{1}{2}}(\omega R)}\mathrm{d}\omega \\ &\equiv -HY_{n+1/2,R}(t). \end{aligned}$$

由等式 (4.5.53) 可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_n^m(R,t)}{\partial r} &= \frac{L'_{n+1/2}(R)}{L_{n+1/2}(R)}u_n^m(R,t) - \int_0^t \frac{\partial^2 u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau^2}HY_{n+1/2,R}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{L'_{n+\frac{1}{2}}(R)}{L_{n+\frac{1}{2}}(R)}u_n^m(R,t) - \frac{\partial u_n^m(R,t)}{\partial t} \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial u_n^m(R,\tau)}{\partial \tau}HY'_{n+\frac{1}{2},R}(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4.5.54}$$

综合公式 (4.5.39) 和 (4.5.54) 可得三维 Klein-Gordon 方程的完全吸收人工边界条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(r,\theta,\varphi,t)}{\partial r} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} \Bigg\{ &\frac{L'_{n+1/2}(R)}{L_{n+1/2}(R)}\int_{S_1} u(R,\theta',\varphi',t)\overline{Y}_n^m(\theta',\varphi')\mathrm{d}s' \\ &- \int_0^t\int_{S_1} \frac{\partial u(R,\theta',\varphi',\tau)}{\partial \tau}HY_{n+1/2,R}(t-\tau)\mathrm{d}s'\mathrm{d}\tau' \end{aligned}$$

$$
- \int_{S_1} \frac{\partial u(R,\theta',\varphi',t)}{\partial t} \overline{Y}_n^m(\theta',\varphi')\mathrm{d}s' \Big\} Y_n^m(\theta,\varphi)
$$

$$
\equiv \mathcal{K}^3\big(u(r,\theta,\varphi,t)\big). \tag{4.5.55}
$$

在等式 (4.5.55) 右端取有限的 N 项，可得近似的人工边界条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(r,\theta,\varphi,t)}{\partial r} = & \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} \Big\{ \frac{L'_{n+1/2}(R)}{L_{n+1/2}(R)} \int_{S_1} u(R,\theta',\varphi',t)\overline{Y}_n^m(\theta',\varphi')\mathrm{d}s' \\
& - \int_0^t \int_{S_1} \frac{\partial u(R,\theta',\varphi',\tau)}{\partial \tau} HY_{n+1/2,R}(t-\tau)\mathrm{d}s'\mathrm{d}\tau' \\
& - \int_{S_1} \frac{\partial u(R,\theta',\varphi',t)}{\partial t} \overline{Y}_n^m(\theta',\varphi')\mathrm{d}s' \Big\} Y_n^m(\theta,\varphi) \\
\equiv & \mathcal{K}_N^3\big(u(r,\theta,\varphi,t)\big).
\end{aligned} \tag{4.5.56}
$$

4.5.3　有限计算区域 D_i 上的初边值问题

应用完全吸收人工边界条件 (4.5.34) $(d=2)$ 和 (4.5.55) $(d=3)$ 可将无界区域 $R^d \times [0,T]$ 上的初边值问题 (4.5.1)~(4.5.2) 等价地简化为有界计算区域 D_i 上的初边值问题 $(d=2,3)$：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + u = f(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in D_i, \tag{4.5.57}
$$

$$
u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{4.5.58}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R} = \mathcal{K}^d\big(u\big|_{\Gamma_R}\big), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.5.59}
$$

应用近似人工边界条件 (4.5.35) 和 (4.5.56) 可将原问题近似地简化为有界计算区域 D_i 上的初边值问题：

$$
\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} - \Delta u^N + u^N = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in D_i, \tag{4.5.60}
$$

$$
u^N|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad (u^N)_t|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{4.5.61}
$$

$$
\frac{\partial u^N}{\partial r}\Big|_{\Gamma_R} = \mathcal{K}_N^d\big(u^N\big|_{\Gamma_R}\big). \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.5.62}
$$

我们有下面的结果：

定理 4.5.1　有界计算区域 D_i 上的初边值问题 (4.5.57)~(4.5.59) 和 (4.5.60)~(4.5.62) 至多存在一个解，而且解 $u(x,t)\big(u^N(x,t)\big)$ 连续依赖于初值 $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ 和右端项 $f(x,t)$。 ∎

证明类似于定理 4.4.1 的证明，这里不再赘述。

数值求解初边值问题 (4.5.60)~(4.5.62)，在有界计算区域 D_i 上可得到原问题 (4.5.1)~(4.5.2) 的数值解 (Han and Yin, 2007)。

4.6 线性 KdV 方程

在这一节中我们研究下面无限区域上线性 KdV 方程的完全吸收人工边界条件：

$$u_t + u_{xxx} = f(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0,T], \tag{4.6.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1, \tag{4.6.2}$$

$$u \to 0, \qquad |x| \to +\infty. \tag{4.6.3}$$

其中 $f(x,t), u_0(x)$ 为已知函数，并且它们的支集是紧的，即 $\mathrm{Supp}\{f(x,t)\} \subset [a,b] \times [0,T], \mathrm{Supp}\{u_0(x)\} \subset [a,b], b > a$ 为两个实数。为了克服由于无界性给数值计算带来的困难，我们引进人工边界：

$$\Sigma_a = \{(x,t) \mid x = a,\ 0 \leqslant t \leqslant T\},$$

$$\Sigma_b = \{(x,t) \mid x = b,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

人工边界 Σ_a 和 Σ_b 将无界区域 $R^1 \times [0,T]$ 分割为三部分：有界部分 $D_i = [a,b] \times [0,T]$ 和无界部分 $D_a = (-\infty, a] \times [0,T], D_b = (b,+\infty) \times [0,T]$。在人工边界 Σ_a 和 Σ_b 上找出问题 (4.6.1)~(4.6.3) 的解满足的完全吸收人工边界条件后，可将原问题化为有界计算区域 D_i 上的初边值问题进行数值计算。

4.6.1 人工边界 Σ_a 和 Σ_b 上的完全吸收人工边界条件

首先考虑问题 (4.6.1)~(4.6.3) 的解在区域 D_b 上的限制，$u(x,t)$ 在 D_b 上满足：

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad b < x < +\infty,\ 0 < t \leqslant T. \tag{4.6.4}$$

$$u(x,t)|_{x=b} = u(b,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4.6.5}$$

$$u(x,0) = 0, \quad b < x < +\infty, \tag{4.6.6}$$

$$u \to 0, \quad x \to +\infty. \tag{4.6.7}$$

由于函数 $u(x,t)$ 在 $x = b$ 上的值 $u(b,t)$ 是未知的，问题 (4.6.4)~(4.6.7) 是一个提法不完全的问题，不能唯一地求出 $u(x,t)$，但是如果 $u(b,t)$ 是已知的，则问题

(4.6.4)~(4.6.7) 存在唯一解，并且在边界 Σ_b 上可得到 $u(b,t), u_x(b,t), u_{xx}(b,t)$ 满足的关系。对问题 (4.6.4)~(4.6.7) 应用 Laplace 变换，令：

$$\widehat{u}(x,s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}u(x,t)\mathrm{d}t=\mathcal{L}\big(u(x,t)\big), \tag{4.6.8}$$

则 $\widehat{u}(x,s)$ 满足：

$$s\widehat{u}+\widehat{u}_{xxx}=0, \quad \mathrm{Re}(s)>s_0>0, \tag{4.6.9}$$

$$\widehat{u}(b,s)=\widehat{u}(b,s), \tag{4.6.10}$$

$$\widehat{u}(x,s)\to 0, \quad x\to+\infty. \tag{4.6.11}$$

对变量 x，方程 (4.6.9) 是一个三阶常系数常微分方程，它们的解可表示为：

$$\widehat{u}(x,s)=C_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)x}+C_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)x}+C_3(s)\mathrm{e}^{\lambda_3(s)x}, \tag{4.6.12}$$

其中 $\lambda_1(s)=-\sqrt[3]{s}, \lambda_2(s)=-\sqrt[3]{s}\omega, \lambda_3(s)=-\sqrt[3]{s}\omega^2, \omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$。

我们注意到：

$$\mathrm{Re}\lambda_1(s)<0,\ \mathrm{Re}\lambda_2(s)>0,\ \mathrm{Re}\lambda_3(s)>0,\quad \forall \mathrm{Re}(s)\geqslant s_0>0.$$

由边界条件 (4.6.11) 可得 $C_2(s)=C_3(s)=0$，即：

$$\widehat{u}(x,s)=C_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)x}. \tag{4.6.13}$$

在边界 $x=b$ 上可得：

$$\widehat{u}(b,s)-\frac{1}{\lambda_1^2(s)}\widehat{u}_{xx}(b,s)=0, \tag{4.6.14}$$

$$\widehat{u}_x(b,s)-\frac{1}{\lambda_1(s)}\widehat{u}_{xx}(b,s)=0. \tag{4.6.15}$$

由 Laplace 逆变换 (Gradsbteyn and Kyzhik, 2004, P. 118) 可得：

$$u(b,t)-J_t^{(2/3)}u_{xx}(b,t)=0, \tag{4.6.16}$$

$$u_x(b,t)+J_t^{(1/3)}u_{xx}(b,t)=0. \tag{4.6.17}$$

其中 $J_t^{(\alpha)}$ 是由下式定义的积分算子：

$$J_t^{(\alpha)}h=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}h(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0,\ \alpha>0. \tag{4.6.18}$$

事实上条件 (4.6.16)~(4.6.17) 是原问题 (4.6.1)~(4.6.3) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_b 上满足的准确边界条件，是完全吸收的边界条件。

类似地考虑原问题的解 $u(x,t)$ 在区域 D_a 上的限制，$u(x,t)$ 的 Laplace 变换 $\widehat{u}(x,s)$ 满足：

$$s\widehat{u}+\widehat{u}_{xxx}=0, \tag{4.6.19}$$

$$\widehat{u}(a,s)=\widehat{u}(a,s), \tag{4.6.20}$$

$$\widehat{u}(x,s)\to 0,\quad x\to-\infty. \tag{4.6.21}$$

问题 (4.6.19)~(4.6.21) 的一般解为：

$$\widehat{u}(x,s)=C_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)x}+C_3(s)\mathrm{e}^{\lambda_3(s)x}. \tag{4.6.22}$$

并且，

$$\widehat{u}_x(x,s)=\lambda_2(s)C_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)x}+\lambda_3(s)C_3(s)\mathrm{e}^{\lambda_3(s)x}, \tag{4.6.23}$$

$$\widehat{u}_{xx}(x,s)=\lambda_2^2(s)C_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)x}+\lambda_3^2(s)C_3(s)\mathrm{e}^{\lambda_3(s)x}. \tag{4.6.24}$$

在 $x=a$ 上可得：

$$\widehat{u}(a,s)+\frac{1}{\lambda_1(s)}\widehat{u}_x(a,s)+\frac{1}{\lambda_1^2(s)}\widehat{u}_{xx}(a,s)=0. \tag{4.6.25}$$

对上式求 Laplace 逆变换得到：

$$u(a,t)-J_t^{(\frac{1}{2})}u_x(a,t)+J_t^{(\frac{2}{3})}u_{xx}(a,t)=0. \tag{4.6.26}$$

条件 (4.6.26) 是原问题 (4.6.1)~(4.6.3) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_a 上满足的准确边界条件。

4.6.2 有界计算区域上的等价初边值问题

应用完全吸收人工边界条件 (4.6.16)~(4.6.17) 和 (4.6.26) 可将原问题 (4.6.1) ~(4.6.3) 等价地简化为有界计算区域 D_i 上的初边值问题：

$$u_t+u_{xxx}=f(x,t),\quad \forall(x,t)\in D_i, \tag{4.6.27}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \forall x\in[a,b], \tag{4.6.28}$$

$$u(a,t)-J_t^{(1/3)}u_x(a,t)+J_t^{(2/3)}u_{xx}(a,t)=0, \tag{4.6.29}$$

$$u(b,t)-J_t^{(2/3)}u_{xx}(b,t)=0, \tag{4.6.30}$$

$$u_x(b,t)+J_t^{(1/3)}u_{xx}(b,t)=0. \tag{4.6.31}$$

对于初边值问题 (4.6.27)~(4.6.31) 有下面的稳定性结果：

定理 4.6.1　初边值问题 (4.6.27)~(4.6.31) 的解 $u(x,t)$ 满足下面的稳定性估计：

$$\int_a^b u^2(x,t)\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}^t\int_a^b u_0^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^t\int_a^b \mathrm{e}^{t-\tau}f^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,\quad t>0. \tag{4.6.32}$$

为了证明定理 4.6.1，我们首先引用下面的引理 (Zheng, Wen and Han, 2008)：

引理 4.6.1　对已知函数 $h(t), g(t)\big(h(0)=0, g(0)=0\big)$ 和任意 $t>0$，有下面的不等式成立：

$$J_t^{(1)}\big(2hJ_t^{(2/3)}h-(J_t^{(\frac{1}{3})}h)^2\big)\geqslant 0,$$
$$J_t^{(1)}\big(2(J_t^{(1/3)}g-J_t^{(2/3)}f)f-g^2\big)\leqslant 0.$$
■

定理 4.6.1 的证明　将 $2u$ 乘方程 (4.6.27) 并从 a 到 b 积分，应用分部积分和边界条件 (4.6.29)~(4.6.31) 可得：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u^2(x,t)\mathrm{d}x\\
=&-2\int_a^b uu_{xxx}\mathrm{d}x+2\int_a^b fu\mathrm{d}x\\
=&-2\int_a^b\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)_x\mathrm{d}x+2\int_a^b fu\mathrm{d}x\\
=&\,2\Big(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\Big)(a,t)-2\Big(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\Big)(b,t)+2\int_a^b fu\mathrm{d}x\\
=&\big(2(J_t^{(1/3)}u_x-J_t^{(2/3)}u_{xx})u_{xx}-u_x^2\big)(a,t)\\
&-\big(2u_{xx}J_t^{(\frac{2}{3})}u_{xx}-(J_t^{(\frac{1}{3})}u_{xx})^2\big)(b,t)+2\int_a^b fu\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由上述方程对 t 积分可得：

$$\begin{aligned}
\int_a^b\big(u^2(x,t)-u_0^2(x)\big)\mathrm{d}x=&\,J_t^{(1)}\big(2(J_t^{(1/3)}u_x-J_t^{(2/3)}u_{xx})u_{xx}-u_x^2\big)(a,t)\\
&-J_t^{(1)}\big(2u_{xx}J_t^{(\frac{2}{3})}u_{xx}-(J_t^{(1/3)}u_{xx})^2\big)(b,t)\\
&+2\int_0^t\int_a^b f(x,\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

由引理 4.6.1 的结果可得：

$$\int_a^b u^2(x,t)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b u_0^2(x)\mathrm{d}x + 2\int_0^t\int_a^b f(x,\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant \int_a^b u_0^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^t\int_a^b f^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_a^b u^2(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,$$

应用 Gronwall 不等式，定理 4.6.1 获证。 ■

初边值问题 (4.6.27)~(4.6.31) 的数值计算和快速算法可参阅论文 (Zheng, Wen and Han, 2008)。

4.7 附录：三个积分公式

引理 4.7.1 下面三个积分公式成立

$$\int_R^{+\infty} J_\nu(a\xi)K_\nu(b\xi)\xi\mathrm{d}\xi = \frac{R}{a^2+b^2}\Big\{bJ_\nu(aR)K_{\nu+1}(bR) - aJ_{\nu+1}(aR)K_\nu(bR)\Big\}, \tag{4.7.1}$$

$$\int_R^{+\infty} Y_\nu(a\xi)K_\nu(b\xi)\xi\mathrm{d}\xi = \frac{R}{a^2+b^2}\Big\{bY_\nu(aR)K_{\nu+1}(bR) - aY_{\nu+1}(aR)K_\nu(bR)\Big\}, \tag{4.7.2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\omega}{\omega^2+1}\frac{J_\nu(\omega r)Y_\nu(\omega R) - J_\nu(\omega R)Y_\nu(\omega r)}{J_\nu^2(\omega R)+Y_\nu^2(\omega R)}\mathrm{d}\omega = -\frac{2}{\pi}\frac{K_\nu(r)}{K_\nu(R)}, \quad 0 < R < r. \tag{4.7.3}$$

其中 $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ 为 ν 阶第一类和第二类 Bessel 函数，$K_\nu(x)$ 为 ν 阶第二类虚变量 Bessel 函数，实数 $a>0, b>0, R>0$。ν 为实数而且 $\nu \geqslant 0$。

证明

1. 由书 (Gradstbteyn and Kyzlik, 1980, P.658) 中的公式 (6.521) 可得：

$$\begin{aligned}
&\int_R^{+\infty} J_\nu(a\xi)K_\nu(b\xi)\xi\mathrm{d}\xi \\
&= \int_0^{+\infty} J_\nu(a\xi)K_\nu(b\xi)\xi\mathrm{d}\xi - \int_0^R J_\nu(a\xi)K_\nu(b\xi)\xi\mathrm{d}\xi \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^\nu \frac{1}{a^2+b^2} - \frac{1}{a^2+b^2}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^\nu + aRJ_{\nu+1}(aR)K_\nu(bR) - bRJ_\nu(aR)K_{\nu+1}(bR)\right\} \\
&= \frac{R}{a^2+b^2}\Big\{bJ_\nu(aR)K_{\nu+1}(bR) - aJ_{\nu+1}(aR)K_\nu(bR)\Big\}.
\end{aligned}$$

公式 (4.7.1) 获证。

2. 令：

$$
\begin{aligned}
F_1(R) &= \int_R^{+\infty} Y_\nu(a\xi)K_\nu(b\xi)\xi\mathrm{d}\xi,\\
F_2(R) &= \frac{R}{a^2+b^2}\Big\{aY_\nu(aR)K_{\nu+1}(bR) - aY_{\nu+1}(aR)K_\nu(bR)\Big\}.
\end{aligned}
$$

对 $F_1(R), F_2(R)$ 求微商：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}R} &= -RY_\nu(aR)K_\nu(bR),\\
\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}R} &= \frac{1}{a^2+b^2}\Big\{bY_\nu(aR)K_{\nu+1}(bR) - aY_{\nu+1}(aR)K_\nu(bR)\Big\}\\
&\quad + \frac{R}{a^2+b^2}\Big\{abY_\nu'(aR)K_{\nu+1}(bR) + b^2Y_\nu(aR)K_{\nu+1}'(bR)\\
&\quad - a^2Y_{\nu+1}'(aR)K_\nu(bR) - abY_{\nu+1}(aR)K_\nu'(bR)\Big\}\\
&= \frac{1}{R(a^2+b^2)}\Big\{\big[RbY_\nu(aR) + R^2abY_\nu'(aR)\big]K_{\nu+1}(bR)\\
&\quad - \big[RaY_{\nu+1}(aR) + R^2a^2Y_{\nu+1}'(aR)\big]K_\nu(bR)\\
&\quad - R^2abY_{\nu+1}(aR)K_\nu'(bR) + R^2b^2Y_\nu(aR)K_{\nu+1}'(bR)\Big\}
\end{aligned}
$$

应用递推公式 (Andrews, 1992, P. 278, P. 292)：

$$
\begin{aligned}
xY_\nu'(x) &= xY_{\nu-1}(x) - \nu Y_\nu(x),\\
xY_{\nu+1}'(x) &= xY_\nu(x) - (\nu+1)Y_{\nu+1}(x),\\
xK_\nu'(x) &= \nu K_\nu(x) - xK_{\nu+1}(x),\\
xK_{\nu+1}'(x) &= -(\nu+1)K_{\nu+1}(x) - xK_\nu(x),\\
xY_{\nu-1}(x) + xY_{\nu+1}(x) &- 2\nu Y_\nu(x) = 0,
\end{aligned}
$$

可得：

$$
\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}R} = -RY_\nu(aR)K_\nu(bR) = \frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}R},
$$

并且，

$$
\lim_{R\to+\infty} F_1(R) = \lim_{R\to+\infty} F_2(R) = 0,
$$

由此我们得到 $F_1(R) = F_2(R)$，即公式 (4.7.2) 获证。

3. 由 Weber-Orr's 公式 (Erdélyi，1954，卷 II，P.74) 我们有

$$
f(r) = \int_0^{+\infty} \frac{J_\nu(\omega r)Y_\nu(\omega R) - J_\nu(\omega R)Y_\nu(\omega r)}{[J_\nu(\omega R)]^2 + [Y_\nu(\omega R)]^2}\omega\mathrm{d}\omega
$$

$$\times \int_0^{+\infty} \big[J_\nu(\xi\omega)Y_\nu(R) - Y_\nu(\xi\omega)J_\nu(R)\big]\xi f(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{4.7.4}$$

公式 (4.7.4)对实数 ν 和满足积分 $\int_0^{+\infty} \xi^{\frac{1}{2}}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi$ 收敛的 $f(\xi)$ 成立。在 $f(\xi)$ 的连续点 $\xi = r$ 上公式 (4.7.4) 的左端为 $f(r)$，若 $f(\xi)$ 在 $\xi = r$ 上不连续是第一类间断点，则 (4.7.4) 的左端为 $\frac{1}{2}\big(f(r-0)+f(r+0)\big)$。取 $f(\xi)$ 为：

$$f(\xi) = \begin{cases} K_\nu(\xi), & \xi \geqslant R, \\ 0, & 0 \leqslant \xi < R. \end{cases} \tag{4.7.5}$$

显然，对由公式 (4.7.5) 给出的 $f(\xi)$ 满足积分 $\int_0^{+\infty} \xi^{1/2}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi$ 收敛的条件。

由积分等式 (4.7.1) 和式 (4.7.2) 可得：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \big[J_\nu(\xi\omega)Y_\nu(\omega R) - Y_\nu(\xi\omega)J_\nu(\omega R)\big]\xi f(\xi)\mathrm{d}\xi \\
=& Y_\nu(\omega R)\int_R^{+\infty} J_\nu(\xi\omega)K_\nu(\xi)\xi d\xi - J_\nu(\omega R)\int_R^{+\infty} Y_\nu(\xi\omega)K_\nu(\xi)\xi\mathrm{d}\xi \\
=& Y_\nu(\omega R)\frac{R}{\omega^2+1}\Big[J_\nu(\omega R)K_{\nu+1}(R) - \omega J_{\nu+1}(\omega R)K_\nu(R)\Big] \\
&- J_\nu(\omega R)\frac{R}{\omega^2+1}\Big[Y_\nu(\omega R)K_{\nu+1}(R) - \omega Y_{\nu+1}(\omega R)K_\nu(R)\Big] \\
=& \frac{R\omega}{\omega^2+1}\Big[-Y_\nu(R\omega)J_{\nu+1}(\omega R) + J_\nu(R\omega R)Y_{\nu+1}(\omega R)\Big]K_\nu(R) \\
=& \frac{R\omega}{\omega^2+1}\Big[Y_\nu(\omega R)J_\nu'(\omega R) - J_\nu(\omega R)Y_\nu'(\omega R)\Big]K_\nu(R) \\
=& -\frac{R\omega}{\omega^2+1}\frac{2}{\pi}\frac{1}{R\omega}K_\nu(R) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}K_\nu(R).
\end{aligned} \tag{4.7.6}$$

倒数第二个等式用了 $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ 的 Wronksian 行列式 (Andrews, 1992, P.279)。将 (4.7.6) 代入 (4.7.4)，积分等式 (4.7.3) 获证。 ■

本章内容的主要参考文献为：Han and Zheng (2003,2005); Han and Zhang (2009)，Han and Yin (2007); Zheng, Wen and Han (2008)。其他相关的工作可参阅 Grote and Keller (1995, 2000); Hagstrom, Haraharan and Thompson (2003)。

第 5 章　局部人工边界条件

在前面几章中我们讨论的边界条件称为整体边界条件，因为边界条件在一点的值依赖于函数或者其导数在整个边界上的值。在用有限元或者有限差分近似时，所得到的整体刚度矩阵已不再是带状的，特别对于发展方程需要存储计算时刻以前的所有数据，这也是整体边界条件的缺点之一。在这一章中我们讨论另外一种边界条件：局部边界条件，即边界条件在一点的值只依赖于函数或者其导数在这一点的值。

5.1　二维 Poisson 方程外问题的局部边界条件

在这一节中我们讨论无界区域上的二维 Poisson 方程外问题的局部边界条件，近似问题的有限元解法及其误差估计。

5.1.1　人工边界 Γ_R 上的局部边界条件

设 $\Omega_0 \subset R^2$ 为一个有界开区域，其边界 Γ 满足 Lipschitz 条件，$\Omega = R^2 \backslash \bar{\Omega}_0$ 为无界的外区域，其边界是 Γ。在外区域 Ω 上考虑下面的二维 Poisson 方程的外问题：

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{5.1.1}$$

$$u|_{\Gamma} = g(x), \tag{5.1.2}$$

$$\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \text{ 有界，} \tag{5.1.3}$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 Ω 和 Γ 上的已知函数，并且 $f(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的支集是紧的，即存在 $R_0 > 0$ 使得 $\mathrm{Supp}\{f(x)\} \subset B_0$，其中 $B_0 = \{x \mid |x| \leqslant R_0\}$，记 $\Gamma_0 = \{x \mid |x| = R_0\}, \Gamma_0 \subset \Omega$。

引进人工边界 $\Gamma_R = \{x \mid |x| = R\}, R > R_0$。$\Gamma_R$ 将 Ω 分割为有界区域 Ω_i 和无界区域 Ω_e。问题 (5.1.1)~(5.1.3) 的解在 Ω_e 上满足

$$-\Delta u = 0, \quad \forall x \in \Omega_e \tag{5.1.4}$$

$$\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \text{ 有界.} \tag{5.1.5}$$

在第 1 章中我们已经得到问题 (5.1.4)~(5.1.5) 的解：

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\ R\leqslant r<\infty, \tag{5.1.6}$$

和

$$\frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{R}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{5.1.7}$$

其中，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.1.8}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,\cdots \tag{5.1.9}$$

由 (5.1.6) 式我们得到：

$$\frac{\partial^{2k}u(R,\theta)}{\partial\theta^{2k}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k n^{2k}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \tag{5.1.10}$$

假设问题 (5.1.4)~(5.1.5) 的解在人工边界 Γ_R 上有下面的展开式：

$$\frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\alpha_k\frac{\partial^{2k}u(R,\theta)}{\partial\theta^{2k}}, \tag{5.1.11}$$

其中 $\alpha_k,k=1,2,\cdots$，为待定系数。将 (5.1.10) 代入 (5.1.11)，再与 (5.1.7) 比较即得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[-n+\sum_{k=1}^{\infty}n^{2k}\alpha_k\Big](a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)=0. \tag{5.1.12}$$

由此我们得到 $\alpha_k,k=1,2,\cdots$，所满足的方程：

$$\sum_{k=1}^{\infty}n^{2k}\alpha_k=n,\quad n=1,2,\cdots, \tag{5.1.13}$$

因此 (5.1.11) 即为问题 (5.1.1)~(5.1.3) 的解 $u(x)$ 在人工边界 Γ_R 上所满足的边界条件。在实际计算中我们取前 N 项作为近似：

$$\frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\alpha_k^N\frac{\partial^{2k}u(R,\theta)}{\partial\theta^{2k}}\equiv L_N u, \tag{5.1.14}$$

其中系数 $\alpha_k^N,k=1,2,\cdots,N$ 为 α_k 的近似，满足：

$$\sum_{k=1}^{N}n^{2k}\alpha_k^N=n,\quad n=1,2,\cdots,N \tag{5.1.15}$$

当 $N=1,2,\cdots,5$ 时，其解由下表列出：

	α_1^N	α_2^N	α_3^N	α_4^N	α_5^N
$N=1:$	1				
$N=2:$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}$			
$N=3:$	$\frac{74}{60}$	$-\frac{15}{60}$	$\frac{1}{60}$		
$N=4:$	$\frac{533}{420}$	$-\frac{43}{144}$	$\frac{11}{360}$	$-\frac{1}{1008}$	
$N=5:$	$\frac{3881}{3780}$	$-\frac{214}{643}$	$\frac{71}{1728}$	$-\frac{13}{6048}$	$\frac{1}{25920}$

由此我们得到下面的近似边界条件：

$$
\begin{aligned}
N=1:\ & \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u(R,\theta)}{\partial\theta^2},\\
N=2:\ & \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=\frac{1}{R}\left(\frac{7}{6}\frac{\partial^2 u(R,\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{1}{6}\frac{\partial^4 u(R,\theta)}{\partial\theta^4}\right),\\
N=3:\ & \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=\frac{1}{R}\left(\frac{74}{60}\frac{\partial^2 u(R,\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{15}{60}\frac{\partial^4 u(R,\theta)}{\partial\theta^4}+\frac{1}{60}\frac{\partial^6 u(R,\theta)}{\partial\theta^6}\right),\\
N=4:\ & \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=\frac{1}{R}\left(\frac{533}{420}\frac{\partial^2 u(R,\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{43}{144}\frac{\partial^4 u(R,\theta)}{\partial\theta^4}+\frac{11}{360}\frac{\partial^6 u(R,\theta)}{\partial\theta^6}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{1008}\frac{\partial^8 u(R,\theta)}{\partial\theta^8}\right),\\
N=5:\ & \frac{\partial u(R,\theta)}{\partial r}=\frac{1}{R}\left(\frac{3881}{3780}\frac{\partial^2 u(R,\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{214}{643}\frac{\partial^4 u(R,\theta)}{\partial\theta^4}+\frac{71}{1728}\frac{\partial^6 u(R,\theta)}{\partial\theta^6}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{13}{6048}\frac{\partial^8 u(R,\theta)}{\partial\theta^8}+\frac{1}{25920}\frac{\partial^{10} u(R,\theta)}{\partial\theta^{10}}\right).
\end{aligned}
$$

应用上述的近似边界条件，我们可以将问题 (5.1.1)~(5.1.3) 简化为有界区域 Ω_i 上的近似边值问题：

$$-\Delta u=f(x),\quad \forall x\in\Omega_i, \tag{5.1.16}$$

$$u|_\Gamma=g(x), \tag{5.1.17}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\Gamma_R}=L_N u. \tag{5.1.18}$$

5.1.2　应用局部边界条件的有限元近似及其误差估计

下面我们考虑近似边值问题 (5.1.16)~(5.1.18) 的有限元近似及其误差估计 [Bao and Han, 2000]。引进集合和空间：

$$H_g^1(\Omega_i) = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_\Gamma = g\},$$
$$H_*^1(\Omega_i) = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_\Gamma = 0\}.$$

则问题 (5.1.1)~(5.1.3) 在 Ω_i 上的等价变分形式为:

$$\begin{cases} \text{找 } u \in H_g^1(\Omega_i), \text{ 使} \\ a(u,v) + b(u,v) = f(v), \quad \forall v \in H_*^1(\Omega_i), \end{cases} \tag{5.1.19}$$

其中,

$$a(u,v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x,$$
$$b(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n(\theta - \theta') u(R,\theta) v(R,\theta') \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\theta',$$
$$f(v) = \int_{\Omega_i} f v \mathrm{d}x.$$

再引进集合和空间:

$$V_g = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_{\Gamma_R} \in H^N(\Gamma_R), v|_\Gamma = g\},$$
$$V_* = \{v \mid v \in H^1(\Omega_i), v|_{\Gamma_R} \in H^N(\Gamma_R), v|_\Gamma = 0\}.$$

则近似边值问题 (5.1.16)~(5.1.18) 的等价变分形式为:

$$\begin{cases} \text{找 } u_N \in V_g, \text{ 使} \\ a(u_N,v) + b_N(u_N,v) = f(v), \quad \forall v \in V_*, \end{cases} \tag{5.1.20}$$

其中,

$$\begin{aligned} b_N(u,v) &= -\int_{\Gamma_R} v L_N u \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^N \int_0^{2\pi} \frac{\partial^n u(R,\theta)}{\partial \theta^n} \frac{\partial^n v(R,\theta)}{\partial \theta^n} \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

对于 $u, v \in V_*$, 将 $u|_{\Gamma_R}$ 展开为 Fourier 级数:

$$u(R,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{5.1.22}$$

其中 $\{a_n,\ n = 0,1,2,\cdots;\ b_n,\ n = 1,2,\cdots\}$ 由公式 (5.1.8) 和 (5.1.9) 给出。类似地我们将 $v|_{\Gamma_R}$ 展开为 Fourier 级数:

$$v(R,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta), \tag{5.1.23}$$

其中，

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(R,\theta)\cos n\theta \mathrm{d}\theta, \quad n = 0,1,2,\cdots, \tag{5.1.24}$$

$$d_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(R,\theta)\sin n\theta \mathrm{d}\theta, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{5.1.25}$$

将 (5.1.22) 和 (5.1.23) 代入 (5.1.21) 我们得到：

$$\begin{aligned} b_N(u,v) &= \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N} n^{2k}\alpha_k^N\right)(a_n c_n + b_n d_n) \\ &\equiv \pi\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^N(a_n c_n + b_n d_n). \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

由 (5.1.26) 可知双线性形式 $b_N(u,v)$ 的性质依赖于系数 σ_n^N 的性质。首先从 $\{\alpha_k^N,\ N=1,\cdots,5\}$ 的表中可知，当 k 为奇数时，α_k^N 为正，当 k 为偶数时，α_k^N 为负。对于 $N \leqslant 20$，我们可以直接验证上述性质都是正确的。因此对于 $N \leqslant 20$ 我们有：

$$\begin{cases} \alpha_1^N > 0; & \\ \alpha_N^N > 0, & \text{当 } N \text{ 为奇数时;} \\ \alpha_N^N < 0, & \text{当 } N \text{ 为偶数时.} \end{cases} \tag{5.1.27}$$

由此我们得到下面的引理：

引理 5.1.1　若 $1 \leqslant N \leqslant 20$ 为奇数，则有：

$$\sigma_n^N \geqslant n,\ \forall n \geqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n^N}{n^{2N}} = \alpha_N^N > 0. \tag{5.1.28}$$

若 $1 \leqslant N \leqslant 20$ 为偶数，则有：

$$\text{当 } n \text{ 足够大时, } \sigma_n^N < 0, \quad \text{以及} \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_n^N}{n^{2N}} = \alpha_N^N < 0. \tag{5.1.29}$$

证明　引进 $2N$ 阶多项式：

$$\gamma_N(t) = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N t^{2k} - t, \tag{5.1.30}$$

则对 $1 \leqslant N \leqslant 20$，$\gamma_N''(t)$ 为 $2N-2$ 阶偶次多项式，$\gamma_N''(t)=0$ 最多只有 $N-1$ 个非负根且有 $\gamma_N''(0) = 2\alpha_1^N > 0$。因此 $\gamma_N(t)=0$ 最多只有 $N+1$ 个非负根。由

(5.1.15) 即知 $t = 0, 1, 2, \cdots, N$ 是 $\gamma_N(t) = 0$ 的根。因此对于 $1 \leqslant N \leqslant 20$ 我们有：

$$\gamma_N(t) \neq 0, \ \forall t > N, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma_N(t)}{t^{2N}} = \alpha_N^N. \tag{5.1.31}$$

由 (5.1.27) 和 (5.1.31) 即得 (5.1.28) 和 (5.1.29)。 ■

由引理 5.1.1 可得：

引理 5.1.2 若 $1 \leqslant N \leqslant 20$ 为奇数，则有：

$$|b_N(u,v)| \leqslant C_N^{(2)} |u|_{N,\Gamma_R} |v|_{N,\Gamma_R}, \quad \forall u, v \in V_*, \tag{5.1.32}$$

$$|b_N(v,v)| \geqslant C_N^{(1)} |v|_{N,\Gamma_R}^2, \quad \forall v \in V_*, \tag{5.1.33}$$

其中 $C_N^{(1)}$ 和 $C_N^{(1)}$ 为依赖于 N 的正常数。 ■

在下面的讨论中我们选取正整数 N 为小于等于 20 的奇数。假设 $V_*^h \subset V_*$ 和 $V_g^h \subset V_g$ 是两个有限维子空间，我们考虑问题 (5.1.20) 的近似：

$$\begin{cases} \text{找 } u_N^h \in V_g^h, \text{ 使} \\ a(u_N^h, v^h) + b_N(u_N^h, v^h) = f(v^h), \quad \forall v^h \in V_*^h. \end{cases} \tag{5.1.34}$$

对于双线性形式 $b(u,v)$ 和 $b_N(u,v)$ 我们有下面的估计：

引理 5.1.3 若 $u \in V_g$ 是问题 (5.1.1)~(5.1.3) 的解，则有：

$$|b(u,v) - b_N(u,v)| \leqslant \left(1 + C_N^{(2)}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1} |u|_{N,\Gamma_{R_0}} |v|_{N,\Gamma_R}, \quad \forall v \in V_*. \tag{5.1.35}$$

证明 假设 $u(R_0,\theta)$ 和 $v(R,\theta)$ 有下面的展开式：

$$u(R_0,\theta) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta), \tag{5.1.36}$$

$$v(R,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta). \tag{5.1.37}$$

由于 $u(r,\theta)$ 在区域 $\{x : |x| > R_0\}$ 中满足 Laplace 方程，我们得到：

$$u(r,\theta) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{r}\right)^n (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta), \quad r > R_0. \tag{5.1.38}$$

令 $r = R$ 我们得到：

$$u(R,\theta) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{R}\right)^n (\bar{a}_n \cos n\theta + \bar{b}_n \sin n\theta), \tag{5.1.39}$$

因此我们有：

$$
\begin{aligned}
&|b(u,v)-b_N(u,v)| \\
=&\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi(n-\sigma_n^N)\left(\frac{R_0}{R}\right)^n(\bar{a}_n c_n+\bar{b}_n d_n)\right| \\
\leqslant&\sum_{n=N+1}^{\infty}\pi(n-\sigma_n^N)\left(\frac{R_0}{R}\right)^n(|\bar{a}_n c_n|+|\bar{b}_n d_n|) \\
\leqslant&\pi\left(1+C_N^{(2)}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}n^{2N}(|\bar{a}_n c_n|+|\bar{b}_n d_n|) \\
\leqslant&\pi\left(1+C_N^{(2)}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}n^{2N}(\bar{a}_n^2+\bar{b}_n^2)\right]^{1/2} \\
&\cdot\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}n^{2N}(c_n^2+d_n^2)\right]^{1/2} \\
\leqslant&\pi\left(1+C_N^{(2)}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{N,\Gamma_{R_0}}|v|_{N,\Gamma_R}.
\end{aligned}
$$

■

结合引理 5.1.2 和引理 5.1.3 我们有：

定理 5.1.1　假设 u 和 u_N^h 分别是问题 (5.1.19) 和问题 (5.1.34) 的解。若 $f\in L^2(\Omega_i)$ 及 $u|_{\Gamma_{R_0}}\in H^N(\Gamma_{R_0})$ 则有下面的误差估计：

$$
\left\|u-u_N^h\right\|_*\leqslant C_N\left[\inf_{v^h\in V_*^h}\left\|u-v^h\right\|_*+\left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{N,\Gamma_{R_0}}\right], \tag{5.1.40}
$$

其中 C_N 是不依赖于 h 和 R 的常数，对于 $v\in V_*$, $\|v\|_*$ 的定义为：

$$
\|v\|_*=[|v|_{1,\Omega_i}^2+|v|_{N,\Gamma_R}^2]^{1/2}.
$$

证明　令 $e=u-u_N^h$，$e^v=v^h-u$，$e^h=v^h-u_N^h$，则由 (5.1.19) 和 (5.1.34) 我们有：

$$
a(e,v^h)+b(u,v^h)-b_N(u_N^h,v^h)=0,\quad\forall v^h\in V^h. \tag{5.1.41}
$$

在 (5.1.41) 中令 $v^h=e^h$，则有：

$$
\begin{aligned}
&\min\{1,C_N^{(1)}\}\left\|e^h\right\|_*^2 \\
\leqslant&a(e^h,e^h)+b_N(e^h,e^h) \\
=&a(e^v,e^h)+b_N(e^v,e^h)+b_N(u,e^h)-b(u,e^h)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \pi\left(1+C_N^{(2)}\right)\left[\|e^v\|_*\|e^h\|_* + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{N,\Gamma_{R_0}}|e^h|_{N,\Gamma_R}\right]$$

$$\leqslant \pi\left(1+C_N^{(2)}\right)\left[\|e^v\|_*\|e^h\|_* + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{N,\Gamma_{R_0}}\|e^h\|_*\right]. \tag{5.1.42}$$

因此我们有：

$$\|e^h\|_* \leqslant C_N\left[\|e^v\|_* + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{N,\Gamma_{R_0}}\right], \quad \forall v^h \in V_*^h. \tag{5.1.43}$$

由 (5.1.43) 及三角不等式即得 (5.1.40)。 ■

若 $u \in H^{p+1}(\Omega_i)$，$u_{\Gamma_R} \in H^{p+N}(\Gamma_R)$，$u_{\Gamma_{R_0}} \in H^N(\Gamma_{R_0})$，假设插值误差由下式给出：

$$\inf_{v^h\in V_*^h}\|u-v^h\|_* \leqslant C_N h^p[|u|_{p+1,\Omega_i} + |u|_{p+N,\Gamma_R}] \tag{5.1.44}$$

结合 (5.1.40) 和 (5.1.43)，再利用 Poincaré 不等式，我们得到：

$$\begin{aligned}
\|u-u_N^h\|_{1,\Omega_0} &\leqslant C_0|u-u_N^h|_{1,\Omega_0}\\
&\leqslant C_0|u-u_N^h|_{1,\Omega_i}\\
&\leqslant C_0\|u-u_N^h\|_*\\
&\leqslant C_N\left[h^p(|u|_{p+1,\Omega_i} + |u|_{p+N,\Gamma_R}) + \left(\frac{R_0}{R}\right)^{N+1}|u|_{N,\Gamma_{R_0}}\right],
\end{aligned} \tag{5.1.45}$$

其中 $\Omega_0 = \{x \in \Omega_i\ :\ |x| < R_0\}$，$C_0$ 是不依赖于 h，R 和 N 的常数.

5.2 三维 Poisson 方程外问题的局部边界条件

假设 $\Gamma \subset R^3$ 是一分片光滑的闭曲面，Ω 是以 Γ 为边界的无界区域。在这一节中，我们考虑下面的两种不同提法的三维 Poisson 方程的外问题 (Han and Zheng, 1999)：

$$(\text{I}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x), & \forall x \in \Omega,\\ u|_\Gamma = g(x), & \\ \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时}, & u \to 0 \end{cases}$$

$$
\text{(II)}\qquad\begin{cases}
-\Delta v = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \\
v|_{\Gamma} = g(x), \\
\displaystyle\int_{\Gamma_\rho} \frac{\partial v}{\partial n} \mathrm{d}s = 0, \quad \forall \rho > R_1, \\
\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \mathrm{d}x < \infty.
\end{cases}
$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 Ω 和 Γ 上的已知函数，并且 $f(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的支集是紧的，即存在 R_1，使得 $\mathrm{Supp}\{f(x)\} \subset \Omega_1 = \Omega \backslash \Omega_1^e = \{x \,||x| \geqslant R_1\}$；$\Gamma_\rho = \{x \mid |x| = \rho\}$。

在无界区域 Ω 上，我们首先引进人工边界：

$$
\Gamma_R = \{x \mid |x| = R\},
$$

其中 $R > R_1$ 为一正实数。人工边界 Γ_R 将区域 Ω 分割为两部分，无界区域 $\Omega_e = \{x \mid |x| > R\}$ 和有界区域 $\Omega_i = \Omega \backslash \bar{\Omega}_e$。有界区域 Ω_i 的边界为 $\partial\Omega_i = \Gamma \cup \Gamma_R$。下面我们分别讨论问题 (Ⅰ) 和问题 (Ⅱ) 在区域 Ω_e 上的解，以求出解 $u(x)$ 在人工边界 Γ_R 上应满足的局部边界条件。

5.2.1　问题 (Ⅰ) 在人工边界 Γ_R 上的局部边界条件

我们考虑问题 (Ⅰ) 在区域 Ω_1^e 上的限制：

$$
-\Delta u = 0, \quad \forall x \in \Omega_1^e, \tag{5.2.1}
$$

$$
\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时，} u \to 0. \tag{5.2.2}
$$

在球坐标下问题 (5.2.1)~(5.2.2) 的解有下面的级数展开式：

$$
u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} \left[\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)((a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\right], \tag{5.2.3}
$$

其中 $P_n^0(t)$ 是 n 阶 Legendre 多项式：

$$
P_n^0(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n (t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^n},
$$

$P_n^m(t)$ 是 Legendre 函数：

$$
P_n^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} P_n^0(t);
$$

系数 a_{nm} 和 b_{nm} 由下式给出：

$$a_{nm}=\frac{1}{N_{nm}^2R_1^2}\int_{\Gamma_1}u(x)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\mathrm{d}s \tag{5.2.4}$$

$$b_{nm}=\frac{1}{N_{nm}^2R_1^2}\int_{\Gamma_1}u(x)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\mathrm{d}s \tag{5.2.5}$$

而 N_{nm} 则由下式给出：

$$N_{nm}=\sqrt{\frac{2\pi\delta_m(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}} \tag{5.2.6}$$

$$\delta_m=\begin{cases}2, & m=0,\\ 1, & m\neq 0.\end{cases} \tag{5.2.7}$$

定义微分算子：

$$L\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{5.2.8}$$

在区域 Ω_1^e 上由 $\Delta u=0$ 我们得到：

$$-Lu=r^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\ \forall r\geqslant R_1 \tag{5.2.9}$$

对于正整数 k，简单计算可得：

$$(-1)^kL^ku=\sum_{n=1}^{\infty}n^k(n+1)^k\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1}\cdot\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi),$$

且有：

$$-\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}u=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1}\cdot\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi).$$

对于任意非负整数 N 和实数 $\{\alpha_1^N,\alpha_2^N,\cdots,\alpha_N^N\}$，在 Γ_R 我们有：

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{1}{R}u-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\alpha_k^NL^ku&=-\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{R}u-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\alpha_k^NL^ku\\&=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{R_1^{n+1}}{R^{n+2}}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi),\end{aligned}$$

其中，

$$A_n = n - \sum_{k=1}^{N} n^k (n+1)^k \alpha_k^N, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

取 $\{\alpha_1^N, \alpha_2^N, \cdots, \alpha_N^N\}$ 为下面的代数方程组的解：

$$\sum_{k=1}^{N} n^k (n+1)^k \alpha_k^N = n, \quad n = 1, 2, \cdots, N, \tag{5.2.10}$$

则在 Γ_R 上：

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{R}u - \frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k \alpha_k^N L^k u \\ = & \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \frac{R_1^{n+1}}{R^{n+2}} \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi) \\ = & O\left(\frac{R_1}{R}\right)^{N+3}. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

对于任意正整数 N，代数方程组 (5.2.10) 存在唯一解 $\{\alpha_1^N, \alpha_2^N, \cdots, \alpha_N^N\}$，当 $N = 1, 2, \cdots, 5$ 时，其解由下表列出：

	α_1^N	α_2^N	α_3^N	α_4^N	α_5^N
$N=1:$	$\frac{1}{2}$				
$N=2:$	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{24}$			
$N=3:$	$\frac{37}{60}$	$-\frac{23}{360}$	$\frac{1}{360}$		
$N=4:$	$\frac{533}{840}$	$-\frac{779}{10080}$	$\frac{53}{10080}$	$-\frac{1}{8064}$	
$N=5:$	$\frac{1627}{2520}$	$-\frac{4343}{50400}$	$\frac{1637}{226800}$	$-\frac{101}{362880}$	$\frac{1}{259200}$

从上面表中可以看出当 N 为奇数时，$\alpha_N^N > 0$，事实上对 $N \leqslant 20$，当 N 为奇数时可直接验证 $\alpha_N^N > 0$。在后面的理论分析中我们将假设 $\alpha_N^N > 0$，我们仅讨论 $N(N \leqslant 20)$ 为奇数的情况。由 (5.2.11) 式我们得到在 Γ_R 上的一系列局部人工边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{R}u = -\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k \alpha_k^N L^k u, \tag{5.2.12}$$

当 $N = 0, 1, 2, \cdots, 5$ 时，局部人工边界条件为：

$$N = 0:\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{R}u = 0$$

$$N = 1:\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{R}u = \frac{1}{2R}Lu$$

$$N = 2:\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{R}u = \frac{7}{12R}Lu + \frac{1}{24R}L^2u$$

$$N = 3:\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{R}u = \frac{37}{60R}Lu + \frac{23}{360R}L^2u + \frac{1}{360R}L^3u$$

$$N = 4:\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{R}u = \frac{533}{840R}Lu + \frac{779}{10080R}L^2u + \frac{53}{10080R}L^3u + \frac{1}{8064R}L^4u$$

$$N = 5:\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{1}{R}u = \frac{1627}{2520R}Lu + \frac{4343}{50400R}L^2u + \frac{1637}{226800R}L^3u + \frac{101}{362880R}L^4u + \frac{1}{259200R}L^5u$$

应用上述局部人工边界条件可将边值问题 (Ⅰ) 简化为有界区域 Ω_i 上的近似边值问题：

$$-\Delta u^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{5.2.13}$$

$$u^N|_{\Gamma} = g(x), \tag{5.2.14}$$

$$\left[\frac{\partial u^N}{\partial n} + \frac{1}{R}u^N\right]\bigg|_{\Gamma_R} = -\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k \alpha_k^N L^k u^N. \tag{5.2.15}$$

为讨论边值问题 (5.2.13)~(5.2.15) 的等价变分问题，引进下面的集合和空间：

$$W_g = \{w \mid w \in H^1(\Omega_i), w|_{\Gamma} = g\},$$
$$W_0 = \{w \mid w \in H^1(\Omega_i), w|_{\Gamma} = 0\},$$
$$W^N = \{w \mid w \in H^1(\Omega_i), w|_{\Gamma_R} \in H^N(\Gamma_R)\},$$
$$W_g^N = \{w \mid w \in W^N, w|_{\Gamma} = g\},$$
$$W_0^N = \{w \mid w \in W^N, w|_{\Gamma} = 0\},$$

这里 $H^1(\Omega_i)$，$H^N(\Gamma_R)$ 分别是定义于 Ω_i 和 Γ_R 上的 Sobolev 空间。由此可得边值问题 (5.2.13)~(5.2.15) 的等价变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u^N \in W_g^N, \text{ 使} \\ a(u^N, w) + b_N(u^N, w) = f(w), \quad \forall w \in W_0^N, \end{cases} \tag{5.2.16}$$

其中，

$$a(u,w)=\int_{\Omega_i}\nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x,$$

$$b_N(u,w)=\frac{1}{R}\int_{\Gamma_R}u\cdot w\mathrm{d}s+\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N\int_{\Gamma_R}L^{k*}u\cdot L^{k*}w\mathrm{d}s,$$

$$L^{k*}=\begin{cases}L^l & \text{当}k=2l,\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial\theta},\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right)L^l & \text{当}k=2l+1.\end{cases}$$

对于双线性形式 $a(u,w)$，显然有：

引理 5.2.1　存在常数 $M_1>0$，$\alpha_1>0$，使得

$$\alpha_1\|w\|_{1,\Omega_i}^2\leqslant a(w,w)\leqslant M_1\|w\|_{1,\Omega_i}^2,\ \forall w\in W_0^N.$$ ■

假设对于给定的 $w\in W^N$，其在球面 Γ_R 上有如下的展开式：

$$w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(e_{nm}\cos m\varphi+f_{nm}\sin m\varphi)\tag{5.2.17}$$

则对于双线性形式 $b_N(u,w)$，我们有：

引理 5.2.2　$b_N(u,w)$ 是 W^N 上的有界双线性形式，且若 $N\geqslant 0$，$\alpha_N^N>0$，则存在常数 $c>0$ 和常数 $\beta_N>0$ 使得：

$$|b_N(u,w)|\leqslant c\|u\|_{*,N,\Omega_i}\|w\|_{*,N,\Omega_i}$$

$$b_N(w,w)\geqslant\beta_N|w|_{*,N,\Gamma_R}^2,\ \forall w\in W^N,$$

其中，

$$|w|_{*,N,\Gamma_R}\equiv\left(\sum_{n=0}^{\infty}n^N(n+1)^N\sum_{m=0}^{N}N_{nm}^2(e_{nm}^2+f_{nm}^2)\right)^{1/2},$$

$$\|w\|_{*,N,\Gamma_R}\equiv\left(\|w\|_{1,\Omega_i}^2+|w|_{*,N,\Gamma_R}^2\right)^{1/2}.$$

证明　设 $u(x)\in W^N$ 在球面 Γ_R 上有如下展开式：

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(c_{nm}\cos m\varphi+d_{nm}\sin m\varphi)\tag{5.2.18}$$

则：

$$
\begin{aligned}
&|b_N(u,w)| \\
=&\left|R\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\sum_{k=1}^{N}n^k(n+1)^k\alpha_k^N\right)\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(c_{nm}e_{nm}+d_{nm}f_{nm})\right| \\
\leqslant& M_N R\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+n^N(n+1)^N\right)\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(|c_{nm}e_{nm}|+|d_{nm}f_{nm}|) \\
\leqslant& M_N\left(|u|_{*,0,\Gamma_R}+|u|_{*,N,\Gamma_R}\right)(|w|_{*,0,\Gamma_R}+|w|_{*,N,\Gamma_R}) \\
\leqslant& C_N\|u\|_{*,N,\Omega_i}\|w\|_{*,N,\Omega_i}
\end{aligned}
\tag{5.2.19}
$$

即 $b_N(u,w)$ 是 W^N 上的有界双线性形式，其中 C_N 是不依赖于 u^N 和 w 的常数，$M_N>1$ 使得

$$
\left|\sum_{k=1}^{N}n^k(n+1)^k\alpha_k^N\right|\leqslant M_N n^N(n+1)^N,\ \forall n=1,2,\cdots.
$$

下面我们证明 $b_N(u,w)$ 的强制性。当 $N=0$ 时：

$$
b_0(w,w)=R\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(e_{nm}^2+f_{nm}^2)=|w|_{*,0,\Gamma_R}^2.
$$

当 $N>0$ 时，令：

$$
P_{2N}(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N x^k(x+1)^k-x,
$$

则 $P_{2N}(x)$ 是一个 $2N$ 阶多项式。由于 $\{\alpha_1^N,\alpha_2^N,\cdots,\alpha_N^N\}$ 是 (5.2.10) 的解，故有：

$$
P_{2N}(n)=0,\ \forall n=0,1,\cdots,N,
$$

即 $\{0,1,\cdots,N\}$ 是 $P_{2N}(x)$ 的 $N+1$ 个非负实根。我们再用反证法来证明在 $(N,+\infty)$ 上 $P_{2N}(x)$ 没有实根。假设 $x>N$ 是 $P_{2N}(x)$ 在 $(N,+\infty)$ 上的一个实根，则由罗尔定理可知 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_{2N}(x)$ 有 N 个正实根

$$
0<x_1^*<x_2^*<\cdots<x_N^*,
$$

另一方面，

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_{2N}(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N[k(k-1)x^{k-2}(x+1)^{k-2}+2k(2k-1)x^{k-1}(x+1)^{k-1}],
$$

因此我们有：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_{2N}(x_i^*) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_{2N}(-x_i^* - 1) = 0, i = 1, 2, \cdots, N,$$

即 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_{2N}(x)$ 有 $2N$ 个实根，与 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_{2N}(x)$ 是 $2N-2$ 阶多项式矛盾。因此由 $\alpha_N^N > 0$ 即知存在常数 $\beta_N > 0$ 使得

$$1 + n + P_{2N}(n) \geqslant \beta_N n^N (n+1)^N,\ \forall n = 0, 1, 2, \cdots.$$

最后我们得到：

$$\begin{aligned} b_N(w, w) &= R\sum_{n=0}^{\infty}(1 + n + P_{2N}(n))\sum_{m=0}^{n} N_{nm}^2(e_{nm}^2 + f_{nm}^2) \\ &\geqslant \beta_N R \sum_{n=0}^{\infty} n^N (n+1)^N \sum_{m=0}^{n} N_{nm}^2 (e_{nm}^2 + f_{nm}^2) \\ &= \beta_N |w|_{*,N,\Gamma_R}^2,\ \forall w \in H^N(\Gamma_R) \end{aligned}$$

■

由引理 5.2.1 和引理 5.2.2 即得：

定理 5.2.1　假设 $\alpha_N^N > 0$，则对给定的 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ 和 $f \in H^{-1}(\Omega_1)$ 变分问题 (5.2.16) 存在唯一解。■

下面的定理给出近似边值问题 (5.2.16) 的解 $u^N(x)$ 和问题 (Ⅰ) 的解 $u(x)$ 之间的误差估计。

定理 5.2.2　假设 $u(x)$ 和 $u^N(x)$ 分别是问题 (Ⅰ) 和变分问题 (5.2.16) 的解，则当 $\alpha_N^N > 0$ 时，我们有如下的误差估计：

$$\left|u - u^N\right|_{1,\Omega_i}^2 + \beta_N \left|u - u^N\right|_{*,N,\Gamma_R}^2 \leqslant \frac{(M_N+1)^2}{\beta_N}\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2N+3} |u|_{*,N,\Gamma_1}^2, \tag{5.2.20}$$

其中常数 β_N 和 M_N 与引理 5.2.1 和引理 5.2.2 中的相同。

证明　假设 $u(x)$ 是问题 (Ⅰ) 的解。限制在 Ω_i 上 $u(x)$ 满足下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in W_g,\ \text{使} \\ a(u, w) + b(u, w) = f(w), \quad \forall w \in W_0, \end{cases} \tag{5.2.21}$$

其中双线性形式 $b(u, w)$ 由下式定义：

$$b(u, w) = -\int_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial n} w \mathrm{d}s.$$

假设 $w(x)$ 由 (5.2.17) 给出，再假设 $u(x)$ 在 Ω_1^e 上由下面的级数给出：

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1}\left[\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\right],$$

则：

$$\begin{aligned}u(R,\theta,\varphi)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_1}{R}\right)^{n+1}\left[\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\right]\\&\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(c_{nm}\cos m\varphi+d_{nm}\sin m\varphi)\right],\end{aligned}$$

我们可得：

$$b(u,w)=R\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(c_{nm}e_{nm}+d_{nm}f_{nm}).$$

令 $E_N(x)=u(x)-u^N(x)$，则由 (5.2.16) 和 (5.2.19) 我们得到：

$$a(E_N,w)+b_N(E_N,w)=b_N(u,w)-b(u,w),\quad \forall w\in W_0^N.$$

在上式中取 $w=E_N$，由引理 5.2.1 和引理 5.2.2 即得：

$$\begin{aligned}|E_N|_{1,\Omega_i}^2+\beta_N|E_N|_{*,N,\Gamma_R}^2&\leqslant a(E_N,E_N)+b_N(E_N,E_N)\\&=b_N(u,E_N)-b(u,E_N).\end{aligned}\tag{5.2.22}$$

另一方面我们有：

$$\begin{aligned}&|b(u,w)-b_N(u,w)|\\&=\left|R\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}n^k(n+1)^k-n\right)\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(c_{nm}e_{nm}+d_{nm}f_{nm})\right|\\&\leqslant(M_N+1)R\sum_{n=N+1}^{\infty}n^N(n+1)^N\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(|c_{nm}e_{nm}|+|d_{nm}f_{nm}|)\\&\leqslant(M_N+1)R\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}n^N(n+1)^N\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(c_{nm}^2+d_{nm}^2)\right]^{1/2}\\&\quad\cdot\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}n^N(n+1)^N\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(e_{nm}^2+f_{nm}^2)\right]^{1/2}\\&\leqslant(M_N+1)R\left[\sum_{n=N+1}^{\infty}n^N(n+1)^N\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2(n+1)}\sum_{m=0}^{n}N_{nm}^2(a_{nm}^2+b_{nm}^2)\right]^{1/2}\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\sum_{n=N+1}^{\infty} n^N(n+1)^N \sum_{m=0}^{n} N_{nm}^2(e_{nm}^2+f_{nm}^2)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant (M_N+1)\left(\frac{R_1}{R}\right)^{N+3/2}\left[R_1\sum_{n=N+1}^{\infty} n^N(n+1)^N \sum_{m=0}^{n} N_{nm}^2(a_{nm}^2+b_{nm}^2)\right]^{1/2}$$

$$\cdot\left[R\sum_{n=N+1}^{\infty} n^N(n+1)^N \sum_{m=0}^{n} N_{nm}^2(e_{nm}^2+f_{nm}^2)\right]^{1/2}$$

$$\leqslant (M_N+1)\left(\frac{R_1}{R}\right)^{N+3/2} |u|_{*,N,\Gamma_1}|w|_{*,N,\Gamma_R}, \tag{5.2.23}$$

令 $w=E_N$，即得：

$$\beta_N|E_N|_{*,N,\Gamma_R}^2 \leqslant b_N(u,E_N)-b(u,E_N)$$
$$\leqslant (M_N+1)\left(\frac{R_1}{R}\right)^{N+3/2} |u|_{*,N,\Gamma_1}|E_N|_{*,N,\Gamma_R},$$

因此有：

$$|E_N|_{*,N,\Gamma_R} \leqslant \frac{(M_N+1)}{\beta_N}\left(\frac{R_1}{R}\right)^{N+3/2} |u|_{*,N,\Gamma_1}. \tag{5.2.24}$$

最后，在 (5.2.23) 中令 $w=E_N$，由 (5.2.22)，(5.2.23) 和 (5.2.24) 式即得定理结果。■

5.2.2　问题 (Ⅱ) 在人工边界 Γ_R 上的局部边界条件

我们考虑问题 (Ⅱ) 的解 v 在区域 Ω_1^e 上的限制，在球坐标下：

$$-\Delta v=0,\quad \forall x\in\Omega_1^e, \tag{5.2.25}$$

$$\int_{\Gamma_\rho}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=0,\quad \forall\rho>R_1, \tag{5.2.26}$$

$$\int_{\Omega_1^e}|\nabla v|^2\mathrm{d}x<\infty. \tag{5.2.27}$$

问题 (5.2.25)~(5.2.27) 的解有下面的级数展开式 [Oleinik, 1987]：

$$v(r,\theta,\varphi)=a_{00}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1}$$
$$\cdot\left[\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\right], \tag{5.2.28}$$

其中，

$$a_{nm}=\frac{1}{N_{nm}^2R_1^2}\int_{\Gamma_1}v(x)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi \mathrm{d}s, \tag{5.2.29}$$

$$b_{nm}=\frac{1}{N_{nm}^2R_1^2}\int_{\Gamma_1}v(x)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi \mathrm{d}s, \tag{5.2.30}$$

而 N_{nm} 则由 (5.2.6) 式定义。由 (5.2.28) 得到：

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+1} \cdot\left[\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\right]. \tag{5.2.31}$$

类似于 5.2.1 中的计算，在 Γ_R 上我们有：

$$-\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\beta_k^N L^k v=-\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\beta_k^N L^k v$$
$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{R_1^{n+1}}{R^{n+2}}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi),$$

其中 L 的定义与 (5.2.8) 相同，B_n 由下式定义：

$$B_n=1+n-\sum_{k=1}^{N}n^k(n+1)^k\beta_k^N,\quad n=1,2,\cdots.$$

取 $\{\beta_1^N,\beta_2^N,\cdots,\beta_N^N\}$ 为下面代数方程组的解，

$$\sum_{k=1}^{N}n^k(n+1)^k\beta_k^N=n+1,\quad n=1,2,\cdots,N, \tag{5.2.32}$$

则在 Γ_R 上：

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\beta_k^N L^k v\\&=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{R_1^{n+1}}{R^{n+2}}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi+b_{nm}\sin m\varphi)\\&=O\left(\frac{R_1}{R}\right)^{N+3}.\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

对于任意正整数 N，代数方程组 (5.2.32) 存在唯一解 $\{\beta_1^N, \beta_2^N, \cdots, \beta_N^N\}$，当 $N = 1, 2, \cdots, 5$ 时，其解由下表列出：

	β_1^N	β_2^N	β_3^N	β_4^N	β_5^N
$N=1$:	1				
$N=2$:	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$			
$N=3$:	$\frac{41}{30}$	$-\frac{73}{360}$	$\frac{7}{720}$		
$N=4$:	$\frac{241}{168}$	$-\frac{2557}{10080}$	$\frac{193}{10080}$	$-\frac{19}{40320}$	
$N=5$:	$\frac{3727}{2520}$	$-\frac{4859}{16800}$	$\frac{12241}{453600}$	$-\frac{79}{72576}$	$\frac{1}{64800}$

由 (5.2.33) 式我们得到在 Γ_R 上的一系列局部近似边界条件：

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k \beta_k^N L^k v. \tag{5.2.34}$$

当 $N = 0, 1, 2, \cdots, 5$ 时，局部近似边界条件为：

$$\begin{aligned}
N=0:\ & \frac{\partial v}{\partial n} = 0,\\
N=1:\ & \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{R}Lv,\\
N=2:\ & \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{5}{4R}Lv + \frac{1}{8R}L^2v,\\
N=3:\ & \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{41}{30R}Lv + \frac{73}{360R}L^2v + \frac{7}{720R}L^3v,\\
N=4:\ & \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{241}{168R}Lv + \frac{2557}{10080R}L^2v + \frac{193}{10080R}L^3v + \frac{19}{40320R}L^4v,\\
N=5:\ & \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{3727}{2520R}Lv + \frac{4859}{16800R}L^2v + \frac{12241}{453600R}L^3v + \frac{79}{72576R}L^4v\\
& \qquad + \frac{1}{64800R}L^5v.
\end{aligned}$$

应用上述局部人工边界条件可将边值问题 (II) 简化为有界区域 Ω_i 上的近似边值问题：

$$-\Delta v^N = f(x), \quad \forall x \in \Omega_i, \tag{5.2.35}$$

$$v^N|_{\Gamma} = g(x), \tag{5.2.36}$$

$$\left.\frac{\partial v^N}{\partial n}\right|_{\Gamma_R} = -\frac{1}{R}\sum_{k=1}^{N}(-1)^k \beta_k^N L^k v^N. \tag{5.2.37}$$

边值问题 (5.2.35)~(5.2.37) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } v^N \in W_g^N, \text{ 使} \\ a(v^N, w) + b_N(v^N, w) = f(w), \quad \forall w \in W_0^N, \end{cases} \tag{5.2.38}$$

其中，

$$a(v, w) = \int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla w \mathrm{d}x,$$

$$b_N(v, w) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{N} \beta_k^N \int_{\Gamma_R} L^{k*} v \cdot L^{k*} w \mathrm{d}s.$$

类似于引理 5.2.2 和定理 5.2.3, 我们有：

引理 5.2.3 $b_N(v, w)$ 是 W^N 上的有界双线性形式：

$$|b_N(v, w)| \leqslant T_N |v|_{*,N,\Gamma_R} |w|_{*,N,\Gamma_R}, \quad \forall v, w \in W^N(\Gamma_R),$$

其中 $T_N > 0$ 是一常数。若 $N \geqslant 0$ 且 $\beta_N^N > 0$，则存在常数 $\gamma_N > 0$ 使得：

$$b_N(w, w) \geqslant \gamma_N |w|_{*,N,\Gamma_R}^2, \ \forall w \in W^N(\Gamma_R).$$ ■

以及

定理 5.2.3 假设 $\beta_N^N > 0$，则对给定的 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ 和 $f \in H^{-1}(\Omega_1)$ 变分问题 (5.2.38) 存在唯一解. ■

假设 $v(x)$ 是问题 (Ⅱ) 的解。限制在 Ω_i 上 $v(x)$ 满足下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } v \in W_g, \text{ 使} \\ a(v, w) + b(v, w) = f(w), \quad \forall w \in W_0, \end{cases} \tag{5.2.39}$$

其中双线性形式 $b(v, w)$ 由下式定义：

$$b(v, w) = -\int_{\Gamma_R} \frac{\partial u}{\partial n} w \mathrm{d}s.$$

假设 $w(x)$ 在Γ_R 上有展开式 (5.2.17)，再假设 $v(x)$ 在 Ω_1^e 上由下面的级数给出：

$$v(r, \theta, \varphi) = c_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n+1} \cdot \left[\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(c_{nm} \cos m\varphi + d_{nm} \sin m\varphi) \right],$$

$$
\begin{aligned}
v(R,\theta,\varphi) = & c_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_1}{R}\right)^{n+1} \\
& \cdot \left[\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(c_{nm}\cos m\varphi + d_{nm}\sin m\varphi)\right] \\
\equiv & a_{00} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\right),
\end{aligned}
$$

则有

$$
b(v,w) = R\sum_{n=0}^{\infty}(1+n)\sum_{m=0}^{n} N_{nm}^2(a_{nm}e_{nm} + b_{nm}f_{nm}).
$$

下面的定理给出近似边值问题 (5.2.38) 的解 $v^N(x)$ 和问题 (II) 的解 $v(x)$ 之间的误差估计，其证明与定理 5.2.4 类似：

定理 5.2.4　假设 $v(x)$ 和 $v^N(x)$ 分别是问题 (II) 和变分问题 (5.2.38) 的解，则当 $\beta_N^N > 0$ 时，我们有如下的误差估计：

$$
\left|v - v^N\right|_{1,\Omega_i}^2 + \gamma_N\left|v - v^N\right|_{*,N,\Gamma_R}^2 \leqslant \frac{(T_N+1)^2}{\gamma_N}\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2N+3}|v|_{*,N,\Gamma_1}^2 \qquad \blacksquare
$$

由于未知函数的高阶导数出现在局部人工边界条件中，这给在有界计算区域 Ω_i 上近似变分问题 (5.1.20)，(5.2.16) 和 (5.2.38) 的实际计算带来了新的本质性困难，即如何构造上述变分问题的有限元子空间? Givoli and Keller (1994) 给出了一类特殊的单元克服这个困难。Han and Zheng (2002-A, 2002-B) 提出引进新的变量，应用混合有限元方法克服这个困难，并且得到了问题 (5.2.16) 和 (5.2.38) 的混合变分公式和混合有限元近似解的误差分析。

5.3　无界区域上的波动方程初值问题的局部边界条件

在这一节中，我们考虑无界区域上高维波动方程初值问题的局部边界条件。对于一维波动方程的初值问题：

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1,\ t \in [0,T], \tag{5.3.1}
$$

$$
u|_{t=0} = \varphi_0(x),\ u_t|_{t=0} = \varphi_1(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^1, \tag{5.3.2}
$$

其中 $a > 0$ 表示声速，未知函数 $u(x,t)$ 表示压力，$\varphi_0(x), \varphi_1(x), f(x,t)$ 为已知函数，$f(x,t)$ 的支集 $\mathrm{Supp}\{f(x,t)\} \subset [0,1]\times[0,T]$，初始函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 的支集 $\mathrm{Supp}\{\varphi_0(x)\} \subset [0,1]$，$\mathrm{Supp}\{\varphi_1(x)\} \subset [0,1]$.

引进人工边界：

$$\Sigma_1 = \Big\{(x,t)|\ x=1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\},$$
$$\Sigma_0 = \Big\{(x,t)|\ x=0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\Big\}.$$

在 4.1 节中已经讨论过问题 (5.3.1)~(5.3.2) 的人工边界条件，我们在人工边界 Σ_1，Σ_0 上得到了 (5.3.1)~(5.3.2) 的解 u 上所满足的边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{\Sigma_1} = 0, \tag{5.3.3}$$

方程 (5.3.3) 为解 u 在人工边界 Σ_1 上所满足的准确人工边界条件，同时它是局部人工边界条件。类似地，我们可得到解 u 在人工边界 Σ_0 上所满足的准确人工边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{\Sigma_0} = 0. \tag{5.3.4}$$

下面考虑的二维波动方程的初值问题：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x_1,x_2,t),\ \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t\in[0,\infty), \tag{5.3.5}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x_1,x_2),\ u_t|_{t=0} = \varphi_1(x-1,x_2),\ \forall (x,x_2)\in\mathbb{R}^2, \tag{5.3.6}$$

其中 $f(x_1,x_2,t)$ 的支集 $\mathrm{Supp}\{f(x_1,x_2,t)\}\subset[0,1]\times[0,1]\times[0,\infty)$。

我们考虑 u 在人工边界

$$\Sigma_{1,1} = \Big\{(x_1,x_2,t)|\ x_1=1,\ -\infty < x_2 < +\infty,\ 0\leqslant t\leqslant\infty\Big\} \tag{5.3.7}$$

上所满足的边界条件。假设初始函数 $\varphi_0(x_1,x_2), \varphi_1(x_1,x_2)$ 的支集

$$\mathrm{Supp}\Big\{\varphi_0(x_1,x_2)\Big\}\subset[0,1]\times[0,1],\ \mathrm{Supp}\Big\{\varphi_1(x_1,x_2)\Big\}\subset[0,1]\times[0,1].$$

考虑初值问题 (5.3.5)~(5.3.6) 的解在区域 $D_1 = [1,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times[0,\infty)$ 上的限制，$u(x_1,x_2,t)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0,\ \forall (x_1,x_2,t)\in D_1, \tag{5.3.8}$$

$$u|_{\Gamma_1} = u(1,x_2,t)\equiv g_1(x_2,t), (x_2,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,\infty), \tag{5.3.9}$$

$$u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0,\ x_1\geqslant 1. \tag{5.3.10}$$

将 u 以零延拓到区域 $[1,+\infty)\times(-\infty,+\infty)\times(-\infty,0]$ 上，对方程 (5.3.8) 进行变量 (x_2,t) 的 Fourier 变换，我们得到：

$$-\omega^2\hat{u}-a^2\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial x_1^2}+a^2\eta^2\hat{u}=0, \tag{5.3.11}$$

其中，

$$\hat{u}(x_1,\eta,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x_1,x_2,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\eta x_2+\omega t)}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}t, \tag{5.3.12}$$

方程 (5.3.11) 的一般解为：

$$\hat{u}=c_1\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega}{a}\sqrt{1-\frac{a^2\eta^2}{\omega^2}}x_1}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{a}\sqrt{1-\frac{a^2\eta^2}{\omega^2}}x_1}, \tag{5.3.13}$$

其右行波解满足方程：

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial x_1}+\frac{\mathrm{i}\omega}{a}\sqrt{1-\frac{a^2\eta^2}{\omega^2}}\hat{u}=0, \tag{5.3.14}$$

令 $z=a^2\eta^2/\omega^2$，则由 Pade 逼近我们得到：

$$\sqrt{1-z}\approx 1-\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k z}{1-a_k z}, \tag{5.3.15}$$

其中，

$$a_k=\cos^2\left(\frac{k\pi}{2N+1}\right),\quad b_k=\frac{2}{2N+1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N+1}\right),\quad k=1,2,\cdots,N. \tag{5.3.16}$$

将方程 (5.3.15) 代入方程 (5.3.14) 得到：

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial x_1}+\frac{\mathrm{i}\omega}{a}\hat{u}-\frac{\mathrm{i}\omega}{a}\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k\eta^2}{\omega^2/a^2-a_k\eta^2}\hat{u}=0. \tag{5.3.17}$$

令：

$$\hat{\phi}_k=\frac{\eta^2}{\omega^2/a^2-a_k\eta^2}\hat{u}, \tag{5.3.18}$$

则有：

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial x_1}+\frac{\mathrm{i}\omega}{a}\hat{u}-\frac{\mathrm{i}\omega}{a}\sum_{k=1}^{N}b_k\hat{\phi}_k=0. \tag{5.3.19}$$

取 Fourier 逆变换即得：

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{N}b_k\frac{\partial \phi_k}{\partial t}=0. \tag{5.3.20}$$

由方程 (5.3.18) 取 Fourier 逆变换可得 ϕ_k 所满足的方程：

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t^2}-a_k\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0, \quad k=1,2,\cdots,N. \tag{5.3.21}$$

方程 (5.3.20) 和 (5.3.21) 即为解 u 在人工边界 $\Sigma_{1,1}$ 上所满足的高阶局部条件人工边界条件。进一步引进下面的人工边界：

$$\Sigma_{1,0}=\Big\{(x_1,x_2,t)|\ x_1=0,\ -\infty<x_2<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant\infty\Big\} \tag{5.3.22}$$

$$\Sigma_{2,1}=\Big\{(x_1,x_2,t)|\ x_2=1,\ -\infty<x_1<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant\infty\Big\} \tag{5.3.23}$$

$$\Sigma_{2,0}=\Big\{(x_1,x_2,t)|\ x_2=0,\ -\infty<x_1<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant\infty\Big\} \tag{5.3.24}$$

通过同样的分析可分别在上面人工边界 $\Sigma_{1,0}$，$\Sigma_{2,1}$，$\Sigma_{2,0}$ 上得到类似的高阶局部条件人工边界条件，则可将原问题 (5.3.5)~(5.3.6) 简化到有界计算区域 $D_i=[0,1]\times[0,1]\times[0,\infty)$ 上进行数值计算。

本章内容的主要参考文献为：Han and Wu (1985-A); Bao and Han (2000); Han and Zheng (1999); Engquist and Majda (1977); Collino (1993); Alpert, Greengard and Hagstrom (2002); Givoli (2004)。读者可进一步参阅上述文献中的数值计算例子。其他的相关工作可参阅论文：Bao and Han (1997); Han and Zheng (2002-A, 2002-B); Givoli and Keller (1994)。

第 6 章　离散人工边界条件

在前 5 章中，我们集中讨论了无界区域上偏微分方程的解在人工边界上的整体人工边界条件和局部人工边界条件的构造，应用分析的方法和技巧找出偏微分方程在特定无界区域上解的公式，然后构造出整体人工边界条件和局部人工边界条件。由于所用方法的局限性，我们所讨论分析的问题受到不少限制：第一是对人工边界形状的限制，在前几章讨论的问题中要求人工边界的形状比较规则，例如对二维问题选取人工边界为一个圆周 (外问题) 或直线段 (无限长带状区域)，对三维外问题选取人工边界为一个球面；第二是对偏微分方程的限制，要求偏微分方程在人工边界的外部区域为常系数偏微分方程。这两个限制缩小了人工边界方法所能解决问题的范围，使用起来也不够方便。在本章中我们将使用数值方法来构造人工边界条件，部分地克服上述限制，我们称这类人工边界条件为离散人工边界条件。下面通过具体的问题引进和分析离散人工边界条件以及它们在无界区域上偏微分方程数值解中的应用。

6.1　二维 Poisson 方程外问题在任意多边形人工边界上的边界条件 —— 线法

事实上人们一直在寻找克服对人工边界形状限制的方法，例如 Benporat and Givoli (1995) 和 Wu and Yu (2000) 应用保角变换方法给出了二维 Laplace 方程外问题在椭圆形状人工边界上的整体边界条件。Huang and Yu (2006) 研究三维 Laplace 方程外问题在椭球面上的整体人工边界条件。Han and Bao (1999), Bao and Han (1999), Han and Huang (2001-A, 2001-B) 应用线法(The Method of Lines) 对二维 Poisson 方程外问题，弹性地基问题及复合材料应力强度因子的计算等问题在任意多边形人工边界上构造出了高精度的离散人工边界条件。线法(Xanthis and Schwab 1991) 是求解偏微方程的一种半离散方法，在上述论文中将其应用于无界区域上偏微方程的数值解。在这一节中我们以二维 Poisson 方程外问题为例，讨论克服对人工边界形状限制的线法，详细介绍如何应用线法在多边形人工边界上构造离散人工边界条件。

6.1.1 多边形人工边界上的离散人工边界条件

我们再一次讨论二维 Poisson 方程外问题 (Ⅰ) 的数值近似解：

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{6.1.1}$$

$$u|_{\Gamma} = g(x), \tag{6.1.2}$$

$$u\text{有界, 当}|x| \to \infty, \tag{6.1.3}$$

其中外区域 Ω，已知函数 $f(x), g(x)$ 满足 1.1 节中给出的条件。引进多边形人工边界 $\Gamma_e \in \Omega$, Γ_e 将 Ω 分割为有界区域 Ω_i 和无界区域 $\Omega_e = \Omega\backslash\overline{\Omega}_i$(见图 6-1)，使 $\mathrm{Supp}\{f(x)\} \subset \Omega_i$。人工边界 Γ_e 可由极坐标表出：

$$r = e(\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{6.1.4}$$

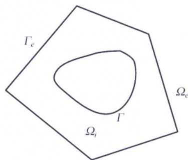


图 6-1

如果我们在 Γ_e 上找出了原问题 (6.1.1)~(6.1.3) 的解满足的边界条件，则可将问题 (6.1.1)~(6.1.3) 简化为在有界区域 Ω_i 上进行数值计算。我们考虑问题 (6.1.1)~(6.1.3) 的解 u 在区域 Ω_e 上的限制，u 满足：

$$\Delta u = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{6.1.5}$$

$$u|_{\Gamma_e} = u(e(\theta), \theta) \equiv u_0(\theta), \tag{6.1.6}$$

$$u\text{ 有界，当 }|x| \to \infty\text{ 时}, \tag{6.1.7}$$

其中 $u|_{\Gamma_e}$ 是未知的，问题 (6.1.5)~(6.1.7) 不能独立地求解。

从偏微分方程的理论 (Gilbarg and Trudinger, 1977) 可知对给定的 $u|_{\Gamma_e} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$，问题 (6.1.5)~(6.1.7) 存在唯一解，而且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_e} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e).$$

由此对 Laplace 的解 u 在人工边界 Γ_e 上可以得到 Steklov-Poincare 映射：

$$S:\quad H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e),$$

即：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_e}=S(u|_{\Gamma_e}).\tag{6.1.8}$$

Steklov-Poincare 映射 (6.1.8) 就是原问题 (6.1.1)~(6.1.3) 的解 u 在多边形人工边界 Γ_e 上满足的准确边界条件。应用 (6.1.8) 可将原问题 (6.1.1)~(6.1.3) 等价地简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\Delta u=f(x),\quad \forall x\in\Omega_i,\tag{6.1.9}$$

$$u|_{\Gamma}=g(x),\tag{6.1.10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_e}=S(u|_{\Gamma_e}).\tag{6.1.11}$$

但是我们不能直接用数值方法求解边值问题 (6.1.9)~(6.1.11)，原因是我们只知道 Stoklov-Poincare 算子 (6.1.8) 存在，没有得到它的表达式，即对人工边界 Γ_e 上已知的 $u|_{\Gamma_e}$，不知道如何计算 $S(u|_{\Gamma_e})$。

我们从问题 (6.1.5)~(6.1.7) 出发，对于已知的 $u|_{\Gamma_e}$ 讨论如何计算 $S(u|_{\Gamma_e})$。假设人工边界 Γ_e 是一个凸多边形的边界，有 $n-1$ 个顶点 $\{a_i=(x_1^i,x_2^i),\quad i=1,2,\cdots,n-1\}$，并且，

$$x_1^i=R_i\cos\theta_i,\quad x_2^i=R_i\sin\theta_i,$$

其中 $\theta_i<\theta_{i+1},\quad i=1,2,\cdots,n-2$。不妨设 $\theta_1=0$，进一步以 a_n 表示同一点 a_1，但是 a_n 的极坐标 (R_n,θ_n) 记为 $(R_1,\theta_1+2\pi)$。则射线

$$l_i=\{(r,\theta)|\theta=\theta_i,r\geqslant 0\},\ i=1,2,\cdots,n-1,$$

将区域 Ω_e 分割为 $n-1$ 个子区域：

$$\Omega_e^i=\big\{x=(x_1,x_2)|\ x\in\Omega_e,\quad \theta_i<\theta<\theta_{i+1}\big\},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.\tag{6.1.12}$$

我们引进新的坐标系 (ρ,ϕ)，将区域 Ω_e 变换为 (ρ,ϕ) 平面上的一个带状区域，这里要注意的是，在 Ω_e 的每个子区域 Ω_e^i 上应用的变换是不同的。在 Ω_e^i 引进变换：

$$x_1=\frac{\rho_i e^{\rho}\cos\phi}{\sin(\phi-\alpha_i)},\quad x_2=\frac{\rho_i e^{\rho}\sin\phi}{\sin(\phi-\alpha_i)},\quad \theta_i\leqslant\phi\leqslant\theta_{i+1},\quad 0\leqslant\rho<\infty,\tag{6.1.13}$$

其中，

$$\rho_i = \frac{x_1^{i+1}x_2^i - x_1^i x_2^{i+1}}{\left((x_1^{i+1}-x_1^i)^2+(x_2^{i+1}-x_2^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sin\alpha_i = \frac{x_2^{i+1}-x_2^i}{\left((x_1^{i+1}-x_1^i)^2+(x_2^{i+1}-x_2^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\alpha_i = \frac{x_1^{i+1}-x_1^i}{\left((x_1^{i+1}-x_1^i)^2+(x_2^{i+1}-x_2^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

可以直接验证变换 (6.1.13) 将区域 Ω_e^i 变为 (ρ,ϕ) 平面上一个半无限长的带状区域：

$$\widetilde{\Omega}_e^i = \left\{(\rho,\phi)\mid \theta_i < \phi < \theta_{i+1},\quad 0<\rho<+\infty\right\},\qquad i=1,2,\cdots,n-1.$$

这样 Ω_e 被变换到

$$\widetilde{\Omega}_e = \left\{(\rho,\phi)\mid 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,\ 0<\rho<+\infty\right\},$$

并且 Γ_e 被变换为：

$$\widetilde{\Gamma}_e = \left\{(0,\phi)\mid 0\leqslant\phi<2\pi\right\}. \tag{6.1.14}$$

在子区域 $\Omega_e^i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 上的新坐标系 (ρ,ϕ) 与原坐标系 (x_1,x_2) 有如下关系：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\rho} &= \frac{\rho_i e^{\rho}\cos\phi}{\sin(\phi-\alpha_i)}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\rho_i e^{\rho}\sin\phi}{\sin(\phi-\alpha_i)}\frac{\partial}{\partial x_2},\\
\frac{\partial}{\partial\phi} &= -\frac{\rho_i e^{\rho}\cos\alpha_i}{\sin^2(\phi-\alpha_i)}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\rho_i e^{\rho}\sin\alpha_i}{\sin^2(\phi-\alpha_i)}\frac{\partial}{\partial x_2},\\
\frac{\partial}{\partial x_1} &= -\rho_i^{-1}e^{-\rho}\left[\sin\alpha_i\frac{\partial}{\partial\rho} + \sin\phi\sin(\phi-\alpha_i)\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= \rho_i^{-1}e^{-\rho}\left[\cos\alpha_i\frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\phi\sin(\phi-\alpha_i)\frac{\partial}{\partial\phi}\right],\\
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \rho_i^{-2}e^{-2\rho}\left[\sin^2\alpha_i\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \sin 2\phi\sin^2(\phi-\alpha_i)\frac{\partial}{\partial\phi} - \sin^2\alpha_i\frac{\partial}{\partial\rho}\right.\\
&\qquad \left. +2\sin\alpha_i\sin\phi\sin(\phi-\alpha_i)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\phi} + \sin^2\phi\sin^2(\phi-\alpha_i)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right],\\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \rho_i^{-2}e^{-2\rho}\left[\cos^2\alpha_i\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \sin 2\phi\sin^2(\phi-\alpha_i)\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos^2\alpha_i\frac{\partial}{\partial\rho}\right.\\
&\qquad \left. +2\cos\alpha_i\cos\phi\sin(\phi-\alpha_i)\frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\phi} + \cos^2\phi\sin^2(\phi-\alpha_i)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right],
\end{aligned}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \rho_i^{-2} \mathrm{e}^{-2\rho} \Big[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\partial}{\partial \rho} + \sin^2(\phi - \alpha_i) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \phi} + \sin^2(\phi - \alpha_i) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Big],$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\rho_i \mathrm{e}^{2\rho}}{\sin^2(\phi - \alpha_i)} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi.$$

进一步在人工边界 Γ_e 上有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_e} &= \Big(\sin \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_1} - \cos \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big)\Big|_{\rho=0} \\ &= -\rho_i^{-1} \Big[\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \sin 2(\phi - \alpha_i) \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big]_{\rho=0}, \quad \theta_i < \phi < \theta_{i+1}. \end{aligned}$$

在射线 $l_i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 上：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\phi=\theta_i^+} &= \Big(\sin \theta_i \frac{\partial u}{\partial x_1} - \cos \theta_i \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big)\Big|_{\phi=\theta_i^+} \\ &= -R_i^{-1} \mathrm{e}^{-\rho} \Big[\cot(\theta_i - \alpha_i) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big]\Big|_{\phi=\theta_i^+}, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\phi=\theta_i^-} &= \Big(\sin \theta_i \frac{\partial u}{\partial x_1} - \cos \theta_i \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big)\Big|_{\phi=\theta_i^-} \\ &= -R_i^{-1} \mathrm{e}^{-\rho} \Big[\cot(\theta_i - \alpha_{i-1}) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big]\Big|_{\phi=\theta_i^-}. \end{aligned}$$

问题 (6.1.5)~(6.1.7) 被变换为区域 $\widetilde{\Omega}_e$ 上的带间断系数偏微分方程的边值问题：

$$\frac{1}{\sin^2(\phi - \alpha_i)} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \cot(\phi - \alpha_i) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} \Big[\frac{\partial u}{\partial \phi} + \cot(\phi - \alpha_i) \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big] = 0,$$

$$\theta_i < \phi < \theta_{i+1}, \quad 0 < \rho < +\infty, i = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{6.1.15}$$

$$u(\rho, \theta_i^-) = u(\rho, \theta_i^+), \quad 0 \leqslant \rho < +\infty, i = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{6.1.16}$$

$$\begin{aligned} &\Big(\cot(\theta_i - \alpha_{i-1}) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big)\Big|_{\theta=\theta_i^-} \\ &= \Big(\cot(\theta_i - \alpha_i) \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \Big)\Big|_{\theta=\theta_i^+}, \ i = 1, 2, \cdots, n-1, \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

$$u|_{\rho=0} = u_0(\phi), \tag{6.1.18}$$

$$u \text{ 有界, 当 } \rho \to +\infty, \tag{6.1.19}$$

其中 $\theta_1^- = \theta_n^-, \alpha_0 = \alpha_{n-1}$。边值问题 (6.1.15)~(6.1.19) 有如下特点：

(1) 问题定义在一个半无限长带状区域 $\widetilde{\Omega}_e = \{(\rho, \phi) | 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant +\infty\}$ 上，区域 $\widetilde{\Omega}_e$ 的规则性给我们构造人工边界条件带来了方便。

(2) 问题是一个带间断系数二阶偏微分方程的边值问题，方程的系数不是常数，是仅依赖于变量 ϕ 的函数。方程 (6.1.15) 的系数不依赖于变量 ρ。这个特点使得我们可以应用线法构造出问题的离散人工边界。

引进空间

$$V = \{v(\phi)|\ \ v(\phi) \in H^1((0, 2\pi)), v(0) = v(2\pi)\},$$
$$U = \left\{u(\rho, \phi)|\ \ \text{对固定的}\ \rho \in [0, +\infty), u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in V\right\}.$$

间断系数问题 (6.1.15)~(6.1.19) 等价于下面的微分-变分问题：

$$\begin{cases} \text{找}\ u(\rho, \phi) \in U,\ \text{使} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} A_2(u, v) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} A_1(u, v) + A_0(u, v) = 0, \quad \forall v \in V, & (6.1.20) \\ u|_{\rho=0} = u_0(\phi), & (6.1.21) \\ u\ \text{有界，当}\ \rho \to +\infty, & (6.1.22) \end{cases}$$

其中，

$$A_2(u, v) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{1}{\sin^2(\phi - \alpha_i)} u(\rho, \phi) v(\phi) \mathrm{d}\phi, \tag{6.1.23}$$

$$A_1(u, v) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \cot(\phi - \alpha_i) \left[\frac{\partial u(\rho, \phi)}{\partial \phi} v(\phi) - u(\rho, \phi) \frac{\mathrm{d}v(\phi)}{\mathrm{d}\phi}\right] \mathrm{d}\phi, \tag{6.1.24}$$

$$A_0(u, v) = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(\rho, \phi)}{\partial \phi} \frac{\mathrm{d}v(\phi)}{\mathrm{d}\phi} \mathrm{d}\phi. \tag{6.1.25}$$

下面通过线法将微分-变分问题 (6.1.20)~(6.1.22) 进行半离散化，从而构造出在人工边界 Γ_e 上的离散人工边界条件。将区域 $[0, 2\pi]$ 分割为：

$$0 = \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_{M+1} = 2\pi.$$

使每一个 $\theta_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 都是上述 $\{\phi_j\}$ 中的一个。设 $h = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant M} (\phi_{j+1} - \phi_j)$，$h$ 表示剖分的尺寸。令：

$$V_h = \{v_h(\phi)|\ \ v_h|_{[\phi_j, \phi_{j+1}]}\ \text{是线性函数},\ j = 1, 2, \cdots, M;\ \text{并且}\ v_h \in V\},$$
$$U_h = \left\{u_h(\rho, \phi)\ |\ \text{对固定的}\ \rho \in [0, +\infty), u_h, \frac{\partial u_h}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 u_h}{\partial \rho^2} \in V_h\right\}.$$

由此可得到微分 - 变分问题 (6.1.20)~(6.1.22) 的半离散化近似：

$$\begin{cases} \text{找 } u_h(\rho,\phi)\in U_h,\ \text{使} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}A_2(u_h,v)+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}A_1(u_h,v)+A_0(u_h,v)=0,\quad \forall v\in V_h, & (6.1.26)\\ u_h|_{\rho=0}=u_{0,h}(\phi), & (6.1.27)\\ u_h\ \text{有界，当}\ \rho\to+\infty, & (6.1.28)\end{cases}$$

其中 $u_{0,h}(\phi)\in V_h$，是 $u_0(\phi)$ 的插值函数，即：

$$u_{0,h}(\phi_j)=u_0(\phi_j),\quad j=1,2,\cdots,M.$$

设 $\{N_j(\phi),j=1,2,\cdots,M\}$ 是 V_h 的一组基，并且，

$$N_j(\phi_k)=\delta_{jk},\quad 1\leqslant j,k\leqslant M.$$

记：

$$\boldsymbol{N}(\phi)=\big(N_1(\phi),N_2(\phi),\cdots,N_M(\phi)\big)^{\mathrm{T}}.$$

则对任意 $u_h(\rho,\phi)\in U_h$，

$$u_h(\rho,\phi)=\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}(\rho), \tag{6.1.29}$$

其中，

$$\boldsymbol{U}(\rho)=\big(u_h(\rho,\phi_1),u_h(\rho,\phi_2),\cdots,u_h(\rho,\phi_M)\big)^{\mathrm{T}},$$

并且，

$$u_{0,h}(\phi)=\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_0,$$

其中，

$$\boldsymbol{U}_0=\big(u_0(\phi_1),u_0(\phi_2),\cdots,u_0(\phi_M)\big)^{\mathrm{T}}.$$

半离散的微分 - 变分问题 (6.1.26)~(6.1.28) 等价于下面的二阶常微分方程组的边值问题：

$$\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{U}''(\rho)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}'(\rho)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{U}(\rho)=\boldsymbol{0},\quad 0<\rho<+\infty, \tag{6.1.30}$$

$$\boldsymbol{U}(0)=\boldsymbol{U}_0, \tag{6.1.31}$$

$$\boldsymbol{U}(\rho)\ \text{有界, 当}\ \rho\to+\infty, \tag{6.1.32}$$

其中 $\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_0$ 是 $M\times M$ 阶方阵。并且：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_2 &= \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{1}{\sin^2(\phi-\alpha_i)}\boldsymbol{N}(\phi)\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\phi,\\
\boldsymbol{B}_1 &= \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \cot(\phi-\alpha_i)[\boldsymbol{N}(\phi)\boldsymbol{N}'(\phi)^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}'(\phi)\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}]\mathrm{d}\phi,\\
\boldsymbol{B}_0 &= -\int_0^{2\pi}\boldsymbol{N}'(\phi)\boldsymbol{N}'(\phi)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}
$$

从 $\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_0$ 的表达式可直接知道 $\boldsymbol{B}_2$ 是正定对称矩阵，$(-\boldsymbol{B}_0)$ 是半正定对称矩阵，$\boldsymbol{B}_1$ 是反对称矩阵。应用直接方法求解问题 (6.1.30)~(6.1.32)，令：

$$
\boldsymbol{U}(\rho)=\mathrm{e}^{\lambda\rho}\boldsymbol{\xi}, \tag{6.1.33}
$$

为问题 (6.1.30)~(6.1.32) 的解，其中 λ 是待定常数，$\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^M$ 是待定 M 维向量。将 (6.1.33) 代入方程组 (6.1.30) 得到如下二次特征值问题：

$$
\left\{\begin{array}{l}
\text{找 } \lambda\in\mathbb{C} \text{ 和 } \xi\in\mathbb{C}^M,\quad \xi\neq 0,\ \text{使}\\
[\lambda^2\boldsymbol{B}_2+\lambda\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_0]\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}.
\end{array}\right. \tag{6.1.34}
$$

记 $\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，则二次特征值问题 (6.1.34) 等价于标准的广义特征问题：

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_M\\ -\boldsymbol{B}_0 & -\boldsymbol{B}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_M & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}. \tag{6.1.35}
$$

其中 I_M 为 M 阶单位方阵。求解特征值问题 (6.1.35)，可得 M 个非正实部的特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,M)$，对应特征向量

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_j\\ \boldsymbol{\eta}_j\end{pmatrix},\quad j=1,2,\cdots,M,
$$

并且 $\lambda_1=0,\ \ \boldsymbol{\xi}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^M,\ \ \boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{0}\in R^M$。进一步假设 $\{\lambda_j,(j=1,2,\cdots,r)\}$ 为 r 个实特征值，$\{\lambda_j,(j=r+1,\cdots,M)\}$ 为复特征值 (虚部非零)。如果 $\lambda_j(r<j\leqslant M)$ 是 (6.1.35) 的一个复特征值 (虚部非零)，则它的共轭 $\overline{\lambda}_j$ 也是 (6.1.35) 的特征值，因而 $M-r$ 必为偶数。不妨设 M 为偶数, 则可使 $\{\lambda_j,(j=r+1,\cdots,M)\}$ 满足：

$$
\lambda_{2l}=\overline{\lambda}_{2l-1},\left(\frac{r}{2}+1\leqslant l\leqslant\frac{M}{2}\right).
$$

则方程 (6.1.30) 的解 $\boldsymbol{U}(\rho)$ 可表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(\rho)=&\sum_{j=1}^{r}b_j\mathrm{e}^{\lambda_j\rho}\boldsymbol{\xi}_j\\&+\sum_{j=\frac{r}{2}+1}^{\frac{M}{2}}\left[b_{2j-1}\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_{2j}\rho}\boldsymbol{\xi}_{2j})+b_{2j}\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_{2j}\rho}\boldsymbol{\xi}_{2j})\right],\end{aligned}\tag{6.1.36}$$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 和 $\mathrm{Im}(\lambda)$ 表示复数 λ 的实部和虚部，实数 $\{b_j, j=1,2,\cdots,M\}$ 是待定的。由 (6.1.36) 给出的 $\boldsymbol{U}(\rho)$ 满足条件 (6.1.32)。由条件 (6.1.31) 可得：

$$\boldsymbol{U}_0=\sum_{j=1}^{r}b_j\boldsymbol{\xi}_j+\sum_{j=\frac{r}{2}+1}^{\frac{M}{2}}\left[b_{2j-1}\mathrm{Re}(\boldsymbol{\xi}_{2j})+b_{2j}\mathrm{Im}(\boldsymbol{\xi}_{2j})\right].\tag{6.1.37}$$

令：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(\rho)=&\left[\mathrm{e}^{\lambda_1\rho}\xi_1,\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_r\rho}\xi_r,\ \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_{r+2}\rho}\xi_{r+2}),\right.\\&\left.\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_{r+2}\rho}\xi_{r+2}),\cdots,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda_M\rho}\xi_M),\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda_M\rho}\xi_M)\right].\\\boldsymbol{D}_0=&D(0)=\left[\xi_1,\cdots,\xi_r,\ \mathrm{Re}(\xi_{r+2}),\ \mathrm{Im}(\xi_{r+2}),\cdots,\mathrm{Re}(\xi_M),\ \mathrm{Im}(\xi_M)\right],\\\boldsymbol{B}=&\left[b_1,b_2,\cdots,b_M\right]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{D}(\rho)$，$\boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{D}(0)$ 是 $M\times M$ 矩阵。由等式 (6.1.37) 可得：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{U}_0.\tag{6.1.38}$$

将 (6.1.38) 代入 (6.1.36) 可得：

$$\boldsymbol{U}(\rho)=\boldsymbol{D}(\rho)\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{U}_0.\tag{6.1.39}$$

将上式代入 (6.1.29)，我们得到半离散微分-变分问题 (6.1.2)~(6.1.28) 的解 $u_h(\rho,\phi)$：

$$u_h(\rho,\phi)=\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\rho)\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{U}_0.\tag{6.1.40}$$

由上式在人工边界 Γ_e 上可得 $u_h(\rho,\phi)$ 的法向微商：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u_h(\rho,\phi)}{\partial n}\right|_{\Gamma_e}&=-\rho_i^{-1}\left[\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}'(0)\boldsymbol{D}_0^{-1}+\frac{1}{2}\sin 2(\phi-\alpha_i)\boldsymbol{N}'(\phi)^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{U}_0\\&\theta_i<\phi<\theta_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.\end{aligned}\tag{6.1.41}$$

事实上等式 (6.1.41) 是外问题 (6.1.1)~(6.1.3) 在多边形人工边界 Γ_e 上满足的离散人工边界条件，它是准确边界条件 (6.1.8) 的一个数值近似。

6.1.2 外问题 (6.1.1)～(6.1.3) 的数值近似

应用边界条件 (6.1.8) 可将外问题 (6.1.1)～(6.1.3) 等价地简化为有界区域 Ω_i 上的边值问题 (6.1.9)～(6.1.11)。令：

$$V_g = \{v | v \in H^1(\Omega_i), v|_\Gamma = g\},$$
$$V_0 = \{v | v \in H^1(\Omega_i), v|_\Gamma = 0\}.$$

则边值问题 (6.1.1)～(6.1.3) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in V_g, \text{ 使} \\ a(u,v) + b(u,v) = F(v), \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \tag{6.1.42}$$

其中，

$$a(u,v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x, \quad b(u,v) = -\int_{\Gamma_e} S(u|_{\Gamma_e}) v \mathrm{d}s, \quad F(v) = \int_{\Omega_i} f v \mathrm{d}x.$$

考虑变分问题 (6.1.42) 的有限元近似，为了叙述上的方便我们假设 Γ 也是一个多边形的边界。以 J^h 表示区域 Ω_i 的一个正则三角剖分，并且 Γ, Γ_e 上的顶点都取为剖分的节点，在构造离散人工边界时引进的 Γ_e 上的分点 (在 $\rho-\phi$ 坐标系为 $(0,\phi_j)$，$j = 1, 2, \cdots, M$) 与剖分 J^h 在 Γ_e 上的节点是相同的。对剖分 J^h，令：

$$V^h = \{v_h \mid v_h \in C^{(0)}(\overline{\Omega}_i), v_h|_k \in P_1(k), \forall k \in J^h\},$$
$$V_g^h = \{v_h \mid v_h \in V^h, v_h(d_j) = g(d_j), \text{节点 } d_j \in \Gamma\},$$
$$V_0^h = \{v_h \mid v_h \in V^h, v_h|_\Gamma = 0\},$$

其中 V^h 是 $H^1(\Omega_i)$ 的有限元近似空间，由此可得变分问题 (6.1.42) 的有限元近似：

$$\begin{cases} \text{找 } u_h \in V_g^h, \text{ 使} \\ a(u_h, v_h) + b(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_0^h. \end{cases} \tag{6.1.43}$$

下面我们讨论双线性形式 $b(u_h, v_h)$ 的近似计算公式。对于 $u_h, v_h \in V^h$，我们记：

$$\boldsymbol{U}_0^h = [u_h(0,\phi_1), \cdots, u_h(0,\phi_M)]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbb{V}_0^h = [v_h(0,\phi_1), \cdots, v_h(0,\phi_M)]^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{U}_0^h$，$\boldsymbol{V}_0^h$ 表示函数 u_h，v_h 分别在人工边界 Γ_e 上节点上的值。则：

$$u_h|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_0^h = (\boldsymbol{U}_0^h)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}(\phi),$$

$$v_h|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_0^h = (\boldsymbol{V}_0^h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(\phi),$$

由公式 (6.1.41) 我们已经得到了 Steklov-Poincare 算子 S 的数值近似公式：

$$\begin{aligned}S_h(u_h|_{\Gamma_e}) = \frac{\partial u_h(\rho,\phi)}{\partial n}\Big|_{\Gamma_e} &= -\rho_i^{-1}\Big[\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}'(0)\boldsymbol{D}_0^{-1}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sin 2(\phi-\alpha_i)\boldsymbol{N}'(\phi)^{\mathrm{T}}\Big]\boldsymbol{U}_0^h\\ &\quad\theta_i<\phi<\theta_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant n-1.\end{aligned} \tag{6.1.44}$$

由此我们可得双线性形式 $b(u_h,v_h)$ 的近似计算公式：

$$b_h(u_h,v_h) = -\int_{\Gamma_e} S_h(u_h|_{\Gamma_e})v_h\mathrm{d}s, \tag{6.1.45}$$

将公式 (6.1.44) 代入上式，最后可得：

$$\begin{aligned}b_h(u_h,v_h) = -(\boldsymbol{V}_0^h)^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}\frac{1}{\sin^2(\phi-\alpha_i)}\Big[\boldsymbol{N}(\phi)\boldsymbol{N}(\phi)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}'(0)\boldsymbol{D}_0^{-1}\\ +\frac{1}{2}\sin 2(\phi-\alpha_i)\boldsymbol{N}(\phi)\boldsymbol{N}'(\phi)^{\mathrm{T}}\Big]\boldsymbol{U}_0^h\mathrm{d}\phi,\end{aligned} \tag{6.1.46}$$

在问题 (6.1.43) 中应用 (6.1.46) 代替 $b(u_h,v_h)$ 可得近似问题：

$$\begin{cases}\text{找 } u_h\in V_g^h\text{，使}\\ a(u_h,v_h)+b_h(u_h,v_h)=F(v_h),\quad \forall v_h\in V_0^h.\end{cases} \tag{6.1.47}$$

直接求解变分问题 (6.1.47) 可得 $u_h\in V_g^h, u_h$ 是原问题 (6.1.1)~(6.1.3) 在有界区域 Ω_i 上的数值近似解。在论文 Han and Bao(1999) 中给出的数值例子说明了本文给出的方法是可行的，是十分有效的。本文给出的思路和方法进一步被应用于求解内界面问题 (Han and Huang, 1999)，带无限大弹性地基问题的数值模拟 (Han, Bao and Wang, 1997; Bao and Han, 1999)，复合材料应力强度因子的计算 (Han and Huang, 2001-A, 2001-B) 等都十分有效。但是对三维外问题 (多面体人工边界) 的应用还未见重要进展。

6.2 二维粘性不可压流体在管道中的绕流问题 —— 无限差分方法

6.2.1 二维粘性不可压流体在管道中的绕流问题

考虑二维粘性不可压流体在 $\Omega_L = \{x=(x_1,x_2)|\ -\infty<x_1<+\infty, 0<x_2<L\}$ 中的绕流问题，障碍物占有的空间为 $\Omega_0\subset\Omega_L$，流体占有的空间为 $\Omega=\Omega_L\backslash\overline{\Omega}_0$ (见图 6-2)。

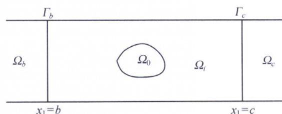


图　6-2

设 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$ 表示流体的速度，p 表示流体的压力，则 $(\boldsymbol{u},p)$ 在无界区域 Ω 上满足 Navier-Stokes (N-S) 方程组：

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial p}{\partial x_1}=\nu\Delta u_1,\quad \forall x\in\Omega, \tag{6.2.1}$$

$$u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial p}{\partial x_2}=\nu\Delta u_2,\quad \forall x\in\Omega, \tag{6.2.2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,\quad \forall x\in\Omega, \tag{6.2.3}$$

和边界条件：

$$u_1|_{x_2=0,L}=u_2|_{x_2=0,L}=0, \tag{6.2.4}$$

$$u_1|_{\partial\Omega_0}=u_2|_{\partial\Omega_0}=0, \tag{6.2.5}$$

$$u_1(x)\to\alpha x_2(L-x_2)\equiv u_\infty(x_2),\quad \text{当 } x_1\to\pm\infty;$$

$$u_2(x)\to 0,\ \text{当 } x_1\to\pm\infty, \tag{6.2.6}$$

其中 $\nu>0$ 是粘性系数，常数 $\alpha>0$；$\big(u_\infty(x_2),0\big)^{\mathrm{T}}$ 表示来流速度，边界条件 (6.2.4)~(6.2.5) 表示流体在边界上是非滑移的。

问题 (6.2.1)~(6.2.6) 的定义区域是无界的。为了将问题 (6.2.1)~(6.2.6) 简化到有界区域上进行计算，选取两个常数 b,c，使 $b<0<c$，并且 $\overline{\Omega}_0\subset(b,c)\times(0,L)$。引入人工边界

$$\Gamma_b=\big\{x=(x_1,x_2)|\ \ x_1=b,0\leqslant x_2\leqslant L\big\},$$

$$\Gamma_c=\big\{x=(x_1,x_2)|\ \ x_1=c,0\leqslant x_2\leqslant L\big\},$$

则 Γ_b,Γ_c 将区域 Ω 分割为三个部分，有界部分：

$$\Omega_i=\big\{x\ |\ \ b<x_1<c,0<x_2<L\big\}\setminus\overline{\Omega}_0,$$

和无界部分：

$$\Omega_b=\big\{x\ |\ \ -\infty<x_1<b,0<x_2<L\big\},$$

$$\Omega_c=\big\{x\ |\ \ c<x_1<+\infty,0<x_2<L\big\}.$$

由于方程 (6.2.1) 和 (6.2.2) 在区域 Ω_c 和 Ω_b 上是非线性的，我们不可能应用前面 5 章发展的整体人工边界条件和局部边界条件的技术在人工边界 Γ_b 和 Γ_c 上构造出类似的人工边界条件。但是当 $|b|, c$ 充分大时，在区域 Ω_c (和 Ω_b) 上流体的流动几乎是 Poiseuille 流。在 Ω_c 和 Ω_b 上可将 N-S 方程组线性化，即在 Ω_c 和 Ω_b 上问题 (6.1.1)~(6.1.2) 的解近似地满足线性 N-S 方程组：

$$u_\infty(x_2)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu\Delta u_1, \quad \forall x \in \Omega_c, \tag{6.2.7}$$

$$u_\infty(x_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \nu\Delta u_2, \quad \forall x \in \Omega_c, \tag{6.2.8}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \forall x \in \Omega_c, \tag{6.2.9}$$

和边界条件：

$$u_1|_{x_2=0,L} = u_2|_{x_2=0,L} = 0, \tag{6.2.10}$$

$$u_1(x) \to u_\infty(x_2), \text{ 当 } x_1 \to +\infty; \quad u_2(x) \to 0, \text{当 } x_1 \to +\infty. \tag{6.2.11}$$

引进流函数 Ψ 和涡函数 ω，则：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = u_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -u_2, \tag{6.2.12}$$

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \tag{6.2.13}$$

并且 N-S 方程组的边值问题 (6.2.1)~(6.2.6) 可用流函数 Ψ 和涡函数 ω 表示为：

$$u_1\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \nu\omega = 0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{6.2.14}$$

$$\Delta\Psi + \omega = 0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{6.2.15}$$

$$\Psi|_{x_2=0} = 0, \Psi|_{x_2=L} = \Psi_L \equiv \int_0^L u_\infty(s)\mathrm{d}s, \quad -\infty < x_1 < +\infty, \tag{6.2.16}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}|_{x_2=0,L} = 0, \quad -\infty < x_1 < +\infty, \tag{6.2.17}$$

$$\Psi|_{\partial\Omega_0} = \text{常数}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n}|_{\partial\Omega_0} = 0, \tag{6.2.18}$$

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi_\infty(x_2) = \int_0^{x_2} u_\infty(s)\mathrm{d}s, \quad x_1 \to \pm\infty; \\ &\qquad \omega \to \omega_\infty(x_2) = -u_\infty'(x_2), \quad x_1 \to \pm\infty, \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示外法向微商。对于 Ω_c 上的线性 N-S 方程组 (6.2.7)~(6.2.9) 和边界条件 (6.2.10)~(6.2.11)，可得：

$$u_{\infty}'(x_2)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} - u_{\infty}(x_2)\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \nu\Delta\omega = 0, \quad \forall x \in \Omega_c, \tag{6.2.20}$$

$$\Delta \Psi + \omega = 0, \quad \forall x \in \Omega_c, \tag{6.2.21}$$

$$\Psi|_{x_2=0} = 0, \Psi|_{x_2=L} = \Psi_L, \quad c < x_1 < +\infty, \tag{6.2.22}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}|_{x_2=0,L} = 0, \quad c < x_1 < +\infty, \tag{6.2.23}$$

$$\Psi \to \Psi_{\infty}(x_2), \quad x_1 \to +\infty; \quad \omega \to \omega_{\infty}(x_2), \quad x_1 \to +\infty. \tag{6.2.24}$$

由于在人工边界 Γ_c 上，没有给出边界条件，边值问题 (6.2.20)~(6.2.24) 的提法是不完全的，不能独立地进行求解。假设：

$$\Psi|_{x_1=c} = \Psi_c(x_2), \quad \omega|_{x_1=c} = \omega_c(x_2), \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant L. \tag{6.2.25}$$

对给定的 $\Psi_c(x_2)\big(\Psi_c(0)=0, \Psi_c(L)=\Psi_L\big)$ 和 $\omega_c(x_2)$，我们将通过求解边值问题 (6.2.20)~(6.2.24) 构造原问题的解在人工边界 Γ_c 上的离散人工边界条件。

6.2.2 离散人工边界条件

我们考虑边值问题 (6.2.20)~(6.2.25) 的差分近似。以 $\Delta x_1, \Delta x_2 = \dfrac{L}{N}$ (其中 N 是一个正整数) 表示网格尺寸，将区域 Ω_c 进行分割，得到网格点 $\big\{x_1^j = c + j\Delta x_1, x_2^k = k\Delta x_2,\ j = 0,1,2,\cdots;\ k = 0,1,2,\cdots,N\big\}$。在区域 Ω_c 的内网格点上应用下面的差分方程近似微分方程 (6.2.20)~(6.2.21)：

$$\begin{aligned}&\frac{u_{\infty}'(x_2^k)}{4\Delta x_1 \Delta x_2}\big[\Psi_{j+1,k+1} - \Psi_{j+1,k-1} - \Psi_{j-1,k+1} + \Psi_{j-1,k-1}\big] \\ &\quad - \frac{u_{\infty}(x_2^k)}{\Delta x_1}\big[\omega_{j+1,k} - \omega_{j-1,k}\big] \\ &\quad + \nu\Big[\frac{\omega_{j+1,k} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j-1,k}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{\omega_{j,k+1} - 2\omega_{j,k} + \omega_{j,k-1}}{(\Delta x_2)^2}\Big] = 0, \\ &\qquad 1 \leqslant k \leqslant N-1, j = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{6.2.26}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\Psi_{j+1,k} - 2\Psi_{j,k} + \Psi_{j-1,k}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{\Psi_{j,k+1} - 2\Psi_{j,k} + \Psi_{j,k-1}}{(\Delta x_2)^2} + \omega_{j,k} = 0, \\ &\qquad 1 \leqslant k \leqslant N-1, j = 1,2,\cdots \end{aligned} \tag{6.2.27}$$

和边界条件：

$$\Psi_{j,0} = 0,\ \Psi_{j,N} = \Psi_L, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.2.28}$$

$$\omega_{j,0} = -\frac{1}{2}\omega_{j,1} + \frac{3(\Psi_{j,0} - \Psi_{j,1})}{(\Delta x_2)^2},\ \omega_{j,N} = -\frac{1}{2}\omega_{j,N-1} + \frac{3(\Psi_{j,N} - \Psi_{j,N-1})}{(\Delta x_2)^2}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.2.29}$$

$$\lim_{j\to+\infty} \Psi_{j,k} = \Psi_\infty(x_2^k), \quad \lim_{j\to+\infty} \omega_{j,k} = \omega_\infty(x_2^k), \tag{6.2.30}$$

$$\Psi_{0,k} = \Psi_c(x_2^k), \quad \omega_{0,k} = \omega_c(x_2^k), \quad k = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{6.2.31}$$

线性方程组 (6.2.26)~(6.2.31) 包含无限多个未知数，它是问题 (6.2.20)~(6.2.25) 的无限差分近似。记：

$$\boldsymbol{Z}_j = \left[\omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \cdots, \omega_{j,N-1};\ \Psi_{j,1}, \Psi_{j,2}, \cdots, \Psi_{j,N-1}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{Z}_\infty = \left[\omega_\infty(x_2^1), \omega_\infty(x_2^2), \cdots, \omega_\infty(x_2^{N-1});\ \Psi_\infty(x_1^1), \Psi_\infty(x_1^2), \cdots, \Psi_\infty(x_1^{N-1})\right]^{\mathrm{T}},$$

则线性方程 (6.2.26)~(6.2.31) 可改写为下面的等价形式：

$$\begin{cases} \text{对于给定的 } \boldsymbol{Z}_0 \in \mathbb{R}^{2N-2}, \text{求}\{\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \cdots\}, \text{使} \\ \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Z}_{j-1} + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Z}_j + C_0\boldsymbol{Z}_{j+1} = \boldsymbol{D}_0, \quad j = 1, 2, \cdots, \\ \lim_{j\to+\infty} \boldsymbol{Z}_j = \boldsymbol{Z}_\infty, \end{cases} \tag{6.2.32}$$

其中 $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{C}_0$ 是 $2N-2$ 阶方阵：

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_\alpha & \boldsymbol{A}_\delta \\ \boldsymbol{0} & \eta_1 \boldsymbol{I}_{N-1} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_\beta & \boldsymbol{B}_\nu \\ \boldsymbol{I}_{N-1} & \boldsymbol{B}_\eta \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_\gamma & -\boldsymbol{A}_\delta \\ 0 & \eta_1 \boldsymbol{I}_{N-1} \end{pmatrix},$$

这里 $\eta_1 = \dfrac{1}{(\Delta x_1)^2}$；$\boldsymbol{A}_\alpha, \boldsymbol{A}_\delta, \boldsymbol{B}_\beta, \boldsymbol{B}_\nu, \boldsymbol{B}_\eta, \boldsymbol{C}_\gamma$ 是 $N-1$ 阶方阵，$\boldsymbol{I}_{N-1}$ 是 $N-1$ 阶单位矩阵，并且：

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_\delta = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_2 & 0 & -\delta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_k = \dfrac{\nu}{(\Delta x_1)^2} + \dfrac{u_\infty(x_2^k)}{2\Delta x_1}$，$\delta_k = \dfrac{u_\infty^{'}(x_2^k)}{4\Delta x_1 \Delta x_2}, k = 1, \cdots, N-1$;

$$\boldsymbol{B}_\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \nu\eta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \nu\eta_2 & \beta_2 & \nu\eta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \nu\eta_2 & \beta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \beta_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_\nu = \begin{pmatrix} -3\nu\eta_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -3\nu\eta_2^2 \end{pmatrix},$$

其中 $\beta_1 = \beta_{N-1} = -\dfrac{2\nu}{(\Delta x_1)^2} - \dfrac{5\nu}{2(\Delta x_2)^2}$，$\beta_k = -\dfrac{2\nu}{(\Delta x_1)^2} - \dfrac{2\nu}{(\Delta x_2)^2}$，$k = 2, \cdots, N-2$，$\eta_2 = \dfrac{1}{(\Delta x_2)^2}$，

$$\boldsymbol{B}_\eta = \begin{pmatrix} \eta_{12} & \eta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta_2 & \eta_{12} & \eta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \eta_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{12} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{N-1} \end{pmatrix},$$

其中 $\eta_{12} = -2(\eta_1 + \eta_2)$，$\gamma_k = \dfrac{\nu}{(\Delta x_1)^2} - \dfrac{u_\infty(x_2^k)}{2\Delta x_1}$，$k = 1, \cdots, N-1$。

$\boldsymbol{D}_0$ 是 $2N-2$ 维向量：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}_0 = \left[d_1, d_2, \cdots, d_{2N-2}\right]^{\mathrm{T}}, \\ &d_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, N-2, N, \cdots, 2N-3, \\ &d_{N-1} = -\frac{3\nu}{(\Delta x_2)^4}\Psi_L, \quad d_{2N-2} = -\frac{1}{(\Delta x_2)^2}\Psi_L. \end{aligned}$$

问题 (6.2.32) 是一个包含无限多个未知数的非齐次线性代数方程组，首先找出它的一个特解。

令：

$$(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{C}_0)\boldsymbol{Z}_\infty=\boldsymbol{G}=[g_1,g_2,\cdots,g_{2N-2}]^{\mathrm{T}}.$$

直接计算可得：

$$\begin{aligned}
g_1&=-\frac{5\nu}{2(\Delta x_2)^2}\omega_\infty(x_2^1)+\frac{\nu}{(\Delta x_2)^2}\omega(x_2^2)-\frac{3\nu}{(\Delta x_2)^4}\Psi_\infty(x_2^1),\\
g_k&=-\frac{\nu}{(\Delta x_2)^2}\omega_\infty(x_2^{k-1})+\frac{2\nu}{(\Delta x_2)^2}\omega(x_2^k)+\frac{\nu}{(\Delta x_2)^2}\omega_\infty(x_2^{k+1}),\\
&\qquad\qquad 2\leqslant k\leqslant N-2,\\
g_{N-1}&=-\frac{5\nu}{2(\Delta x_2)^2}\omega_\infty(x_2^{N-1})+\frac{\nu}{(\Delta x_2)^2}\omega_\infty(x_2^{N-2})-\frac{3\nu}{(\Delta x_2)^4}\Psi_\infty(x_2^{N-1}),\\
g_N&=\omega_\infty(x_2^1)+\frac{-2\Psi_\infty(x_2^1)+\Psi_\infty(x_2^2)}{(\Delta x_2)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{N-1+k}&=\omega_\infty(x_2^k)+\frac{\Psi_\infty(x_2^{k-1})-2\Psi_\infty(x_2^k)+\Psi_\infty(x_2^{k+1})}{(\Delta x_2)^2},\\
&\qquad\qquad 2\leqslant k\leqslant N-2,\\
g_{2N-2}&=\omega_\infty(x_2^{N-1})+\frac{-2\Psi_\infty(x_2^{N-1})+\Psi_\infty(x_2^{N-2})}{(\Delta x_2)^2}.
\end{aligned}$$

由于 $\Psi_\infty(y)$ 是一个三次多项式，$w_\infty(y)$ 是一次多项式并且：

$$\begin{aligned}
&\Psi_\infty''(y)+\omega_\infty(y)=0,\\
&\Psi_\infty(0)=\Psi_\infty'(0)=\Psi_\infty'(L)=0,\\
&\Psi_\infty(L)=\Psi_L.
\end{aligned}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}
&g_k=0,\quad k=1,2,\cdots,N-2,\\
&g_{N-1}=-\frac{3\nu}{(\Delta x_2)^4}\Psi_L,\\
&g_{N-1+k}=0,\quad k=1,2,\cdots,N-2,\\
&g_{2N-2}=-\frac{\Psi_L}{(\Delta x_2)^2}.
\end{aligned}$$

最后我们可得到：

$$(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{C}_0)\boldsymbol{Z}_\infty = \boldsymbol{D}_0. \tag{6.2.33}$$

从上式可知，当 $\boldsymbol{Z}_0 = \boldsymbol{Z}_\infty$ 时，$\{Z_j = Z_\infty,\ j = 1, 2, \cdots\}$ 是问题 (6.2.32) 的解。令

$$\boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{Z}_j - \boldsymbol{Z}_\infty, \quad j = 0, 1, 2, \cdots,$$

则问题 (6.2.32) 可以简化为下面包含无限多个未知数的齐次线性代数方程组：

$$\begin{cases} \text{已知 } \boldsymbol{Y}_0 \in \mathbb{R}^{2N-2},\ \text{找}\{\boldsymbol{Y}_j,\ j = 1, 2, \cdots\},\ \text{使} \\ \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Y}_{j-1} + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}_j + \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{Y}_{j+1} = \boldsymbol{0},\ j = 1, 2, \cdots, \\ \qquad \lim\limits_{j\to+\infty} \boldsymbol{Y}_j = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{6.2.34}$$

有两个基本方法求解无限阶齐次线性代数方程组 (6.2.34)，一个方法称为直接方法 (Ying, 1977)，将问题 (6.2.34) 的求解归结为求解一个 $(4N-4)\times(4N)$ 阶矩阵的全部特征值和特征向量。另一方法是快速迭代法 (Han and Ying, 1979)，这里我们应用快速迭代法求解问题 (6.2.34)。

对于 $\boldsymbol{Y}_{j-1}$ 和 $\boldsymbol{Y}_{j+1}$ 可得：

$$\boldsymbol{Y}_{j-1} = -\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Y}_{j-2} - \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{Y}_j, \quad j = 2, 3, \cdots, \tag{6.2.35}$$

$$\boldsymbol{Y}_{j+1} = -\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Y}_j - \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{Y}_{j+2}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots. \tag{6.2.36}$$

将 (6.2.35) 和 (6.2.36) 代入 (6.2.34) 可得：

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_{j-2} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Y}_j + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_{j+2} = \boldsymbol{0}, \quad j = 2, 3, \cdots, \tag{6.2.37}$$

其中，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 &= -\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}_0, \\ \boldsymbol{B}_1 &= \boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}_0 - \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}_0, \\ \boldsymbol{C}_1 &= -\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}_0. \end{aligned}$$

这个过程可以重复进行，重复 k 次以后可得：

$$\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Y}_{j-2^k} + \boldsymbol{B}_k\boldsymbol{Y}_j + \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{Y}_{j+2^k} = \boldsymbol{0}, \quad j = 2^k, 2^k+1, \cdots, \tag{6.2.38}$$

其中，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_k &= -\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}, \\ \boldsymbol{B}_k &= \boldsymbol{B}_{k-1} - \boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1} - \boldsymbol{C}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{A}_{k-1}, \\ \boldsymbol{C}_k &= -\boldsymbol{C}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{C}_{k-1}. \end{aligned}$$

由 (6.2.38) 可得:

$$\boldsymbol{Y}_j = -\boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{Y}_{j-2^k} - \boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{Y}_{j+2^k},$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots, \quad j = 2^k, 2^k+1, \cdots. \tag{6.2.39}$$

再回到无限阶代数方程组 (6.2.34) 的第一个方程:

$$\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{0}. \tag{6.2.40}$$

将式 (6.2.39)($k=1, j=2^1$) 代入 (6.2.40) 可得:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_1\boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}_1 + \widetilde{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{Y}_{2^1+1} = \boldsymbol{0}, \tag{6.2.41}$$

其中,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_1 = \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1, \quad \widetilde{\boldsymbol{C}}_1 = -\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{C}_1.$$

进一步将 (6.2.39)($k=2, j=2^2$) 代入 (6.2.41) 可得:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_2\boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}_1 + \widetilde{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{Y}_{2^2+1} = \boldsymbol{0}, \tag{6.2.42}$$

其中,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{A}}_1 - \widetilde{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{A}_2, \quad \widetilde{\boldsymbol{C}}_2 = -\widetilde{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}\boldsymbol{C}_2.$$

这个迭代过程重复 k 次后, 我们得到:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_k\boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}_1 + \widetilde{\boldsymbol{C}}_k\boldsymbol{Y}_{2^k+1} = \boldsymbol{0}, \tag{6.2.43}$$

其中,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_k = \widetilde{\boldsymbol{A}}_{k-1} - \widetilde{\boldsymbol{C}}_{k-1}\boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{A}_k, \quad \widetilde{\boldsymbol{C}}_k = -\widetilde{\boldsymbol{C}}_{k-1}\boldsymbol{B}_k^{-1}\boldsymbol{C}_k.$$

当 $k \to +\infty$ 时, 记矩阵序列 $\{\widetilde{\boldsymbol{A}}_k\}, \{\widetilde{\boldsymbol{C}}_k\}$ 的极限为:

$$\lim_{k\to+\infty}\widetilde{\boldsymbol{A}}_k = \widetilde{\boldsymbol{A}}_\infty, \quad \lim_{k\to+\infty}\widetilde{\boldsymbol{C}}_k = \widetilde{\boldsymbol{C}}_\infty.$$

在等式 (6.2.43) 中, 令 $k \to +\infty$ 可得:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\infty\boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{0}.$$

回到变量 $\boldsymbol{Z}_0, \boldsymbol{Z}_1$，得到：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_1 &= -\boldsymbol{B}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\infty \boldsymbol{Z}_0 + \left(I + \boldsymbol{B}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\infty\right)\boldsymbol{Z}_\infty \\ &\equiv -\boldsymbol{T}_\infty \boldsymbol{Z}_0 + (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_\infty)\boldsymbol{Z}_\infty.\end{aligned} \tag{6.2.44}$$

其中 $\boldsymbol{T}_\infty = \boldsymbol{B}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}_\infty$。令：

$$\boldsymbol{W} = \left[\frac{\partial\omega(c,x_2^1)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\omega(c,x_2^{N-1})}{\partial x_1}; \frac{\partial\Psi(c,x_2^1)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial\Psi(c,x_2^{N-1})}{\partial x_1}\right]^{\mathrm{T}}.$$

由差分近似可近似地得到：

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}_0 + \Delta x_1 \boldsymbol{W}. \tag{6.2.45}$$

由此可得：

$$\boldsymbol{W} = -\frac{1}{\Delta x_1}\left(\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_1\right) = -\frac{1}{\Delta x_1}\left(\boldsymbol{T}_\infty + \boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_\infty\right). \tag{6.2.46}$$

等式 (6.2.46) 就是问题 (6.2.1)~(6.2.6) 在人工边界 Γ_c 上的离散人工边界条件。

当 k 足够大时，$\boldsymbol{Y}_{2^{k+1}} \simeq \boldsymbol{0}$，由等式 (6.2.43)，可得到近似关系：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_k \boldsymbol{Y}_0 + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{Y}_1 = 0. \tag{6.2.47}$$

由此在人工边界 Γ_c 上得到近似的离散人工边界条件：

$$\boldsymbol{W} = -\frac{1}{\Delta x_1}\left(\boldsymbol{T}_k + \boldsymbol{I}\right)\left(\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_\infty\right), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{6.2.48}$$

其中 $\boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{B}_0^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}_k$。

在人工边界 Γ_b 上可得到类似的离散人工边界条件，从而可将原问题归结为有界计算区域 Ω_i 上的数值计算问题。在论文 (Han, Lu and Bao, 1994) 中给出的数值例子说明了本节中给出的方法的可行性和有效性。

6.3 带无限大弹性地基问题的数值模拟 —— 无限元方法

设 $\Omega \subset R^2$ 是一个无界区域，边界为 Γ_i 和 Γ_0(见图 6-3)。

在无界区域 Ω 上讨论线性弹性方程组的边值问题，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ 表示位移，$\boldsymbol{f}(x) = \left(f_1(x), f_2(x)\right)^{\mathrm{T}}$ 表示体力，应力张量为 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{2\times 2}$，应变张量为 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})_{2\times 2}$，考虑下面的边值问题：

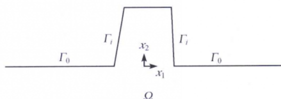


图　6-3

$$-\mu\Delta \boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{6.3.1}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_i^1} = \boldsymbol{g}(x), \tag{6.3.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_i^2} = \boldsymbol{h}(x), \tag{6.3.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_0} = \boldsymbol{0}, \tag{6.3.4}$$

$$\boldsymbol{u}\ 有界, \quad 当|x| \to +\infty. \tag{6.3.5}$$

其中 $\boldsymbol{g}(x)$, $\boldsymbol{h}(x)$ 为 Γ_i^1 和 Γ_i^2 上的已知函数，Γ_i^1 和 Γ_i^2 是边界 Γ_i 的子集，并且 $\Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$, $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_i^2}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_o}$ 表示在边界 Γ_i^2 和边界 Γ_o 上的外法向应力。以 $\boldsymbol{n}$ 表示边界 $\partial\Omega$ 上单位外法向量，则

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_i^2} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_{\Gamma_i^2}, \quad \boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_o} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}|_{\Gamma_o}.$$

定义于无界区域 Ω 上的边值问题 (6.3.1)~(6.3.5) 可以看作带无限大弹性地基坝体应力分析的模型问题。

无限多相似单元方法简称无限元方法 (Thatcher，1976; Ying, 1977; Han and Ying, 1979)，它是有限元方法的发展与补充。在这一节中我们将应用无限元方法在一个折线人工边界上构造无限大弹性地基问题的离散人工边界条件。

6.3.1　折线人工边界上的 Steklov-Poincare 映射

如图 6-4 所示，在 Ω 上引进折线人工边界 Γ_e，在极坐标系中它可以表示为：

$$r = e(\theta), \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant 0. \tag{6.3.6}$$

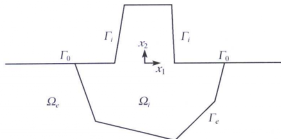


图　6-4

Γ_e 将 Ω 分割为有界部分 Ω_i 和无界部分 Ω_e 并且使 $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{f}(x)) \subset \Omega_i$。如果我们能够在人工边界 Γ_e 上找到原问题的解 $\boldsymbol{u}$ 满足的 "适当的" 人工边界条件，则可将原问题简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题。

考虑 $\boldsymbol{u}$ 在区域 Ω_e 上的限制，它在 Ω_e 上满足：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = 0, \quad \forall x \in \Omega_e, \tag{6.3.7}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{u}\big(e(\theta),\theta\big) \equiv \boldsymbol{u}_e, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant 0, \tag{6.3.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_0 \bigcap \partial\Omega_e} = 0, \tag{6.3.9}$$

$$\boldsymbol{u}\text{ 有界 ，当 } |x| \to +\infty. \tag{6.3.10}$$

事实上函数 $\boldsymbol{u}_e$ 在人工边界 Γ_e 上是未知的，我们不能够独立地求出问题 (6.3.7)~(6.3.10) 的解。对于给定的 $\boldsymbol{u}_e \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_e)$，则问题 (6.3.7)~(6.3.10) 存在唯一的解 $\boldsymbol{u}$，在人工边界 Γ_e 上计算外法向应力 $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_e}$ 可得到映射 $\mathbb{T}$：

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_e} = -T(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e}). \tag{6.3.11}$$

等式 (6.3.11) 是原问题 (6.3.1)~(6.3.5) 的解 $\boldsymbol{u}$ 在人工边界 Γ_e 上满足的准确边界条件。应用 (6.3.11) 可将原问题 (6.3.1)~(6.3.5) 简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(x), \ \forall x \in \Omega_i, \tag{6.3.12}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_i^1} = \boldsymbol{g}(x), \tag{6.3.13}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_i^2} = \boldsymbol{h}(x), \tag{6.3.14}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_0 \bigcup \partial\overline{\Omega}_i} = 0, \tag{6.3.15}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})|_{\Gamma_e} = -\mathbb{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e}), \tag{6.3.16}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_n(\boldsymbol{u})$ 表示 $\boldsymbol{u}$ 在区域边界 $\partial\Omega_i$ 上的外法向应力。引进空间和集合：

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}^1_*(\Omega_i) = \big\{v \mid \ v \in \mathbb{H}^1(\Omega_i), v|_{\Gamma_i^1} = 0\big\},\\
&\mathbb{H}^1(\Omega_i) = \mathbb{H}^1(\Omega_i) \times \mathbb{H}^1(\Omega_i),\\
&\mathbb{H}^1_*(\Omega_i) = \mathbb{H}^1_*(\Omega_i) \times \mathbb{H}^1_*(\Omega_i),\\
&\mathbb{H}^1_g(\Omega_i) = \big\{\boldsymbol{v} \mid \ \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1(\Omega_i), \boldsymbol{v}|_{\Gamma_i^1 = \boldsymbol{g}}\big\},
\end{aligned}$$

则边值问题 (6.3.12)~(6.3.16) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases}
\text{找 } \boldsymbol{u} \in \mathbb{H}^1_g(\Omega_i)\text{，使}\\
A_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}^1_*(\Omega_i),
\end{cases} \tag{6.3.17}$$

其中，

$$A_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_{\Omega_i}\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)+2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)\right.$$

$$\left.+\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)\right\}\mathrm{d}x,$$

$$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_{\Gamma_e}\mathbb{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e})\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s,\quad F(\boldsymbol{v})=\int_{\Omega_i}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_i^2}\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s.$$

$A_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 都是定义于 $\mathbb{H}^1(\Omega_i)$ 上的对称有界双线性形式。变分问题 (6.3.17) 等价于下面的极值问题：

$$\begin{cases}\text{找 } \boldsymbol{u}\in\mathbb{H}_g^1(\Omega_i),\text{ 使}\\ \mathbb{J}_i(\boldsymbol{u})=\min\limits_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{H}_g^1(\Omega_i)}\mathbb{J}_i(\boldsymbol{v}),\end{cases}\tag{6.3.18}$$

其中，

$$\mathbb{J}_i(\boldsymbol{v})=\frac{1}{2}\big(A_i(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})+B(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\big)-F(\boldsymbol{v}).\tag{6.3.19}$$

虽然形式上我们将原问题 (6.3.1)~(6.3.5) 简化为有界区域 Ω_i 上的边值问题 (6.3.12)~(6.3.16)，等价的变分问题 (6.3.17) 和极值问题 (6.3.18)。但是由于我们没有得到在人工边界 Γ_e 上 Steklov-Poincare 映射 $-\mathbb{T}$ 的表达式，对已知 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e}$ 不知道如何计算 $\mathbb{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e})$，也就不知道如何计算双线性形式 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，因而我们仍然不能由变分问题 (6.3.17) 或者极值问题 (6.3.18) 得到原问题在有界计算区域 Ω_i 上的数值近似解。下面我们应用无限多相似单元方法给出映射 $\mathbb{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e})$ 的数值近似或者双线性形式 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的数值近似，然后在有界计算区域 Ω_i 上可得到原问题 (6.3.1)~(6.3.5) 的数值近似解。

6.3.2　双线性形式 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的数值近似

下面通过用无限多相似单元方法求解问题 (6.3.7)~(6.3.10)，给出双线性形式 $B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 的数值近似公式。引进空间：

$$W(\Omega_e)=\left\{v\ \middle|\ \frac{v}{r^{1+\alpha}},\frac{\partial v}{\partial x_1},\frac{\partial v}{\partial x_2}\in L^2(\Omega_e),\text{其中}\alpha>0\right\},$$

$$W_*(\Omega_e)=\left\{v\ \middle|\ v\in W(\Omega_e),v|_{\Gamma_e}=0\right\},$$

$$\mathbb{W}(\Omega_e)=W(\Omega_e)\times W(\Omega_e),$$

$$\mathbb{W}_*(\Omega_e)=W_*(\Omega_e)\times W_*(\Omega_e),$$

和 $\mathbb{W}(\Omega_e)$ 的子集合：

$$\mathbb{W}_e(\Omega_e)=\left\{\boldsymbol{v}\ \middle|\ \boldsymbol{v}\in\mathbb{W}(\Omega_e),\boldsymbol{v}|_{\Gamma_e}=\boldsymbol{u}_e\right\},$$

则边值问题 (6.3.7)~(6.3.10) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{u} \in \mathbb{W}_e(\Omega_e), \text{ 使} \\ A_e(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{W}_*(\Omega_e), \end{cases} \tag{6.3.20}$$

其中，

$$A_e(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Omega_e} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \right.$$
$$\left. + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right\} \mathrm{d}x.$$

进一步变分问题 (6.3.20) 等价于下面的极值问题：

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{u} \in \mathbb{W}_e(\Omega_e), \text{ 使} \\ \mathbb{J}_e(\boldsymbol{u}) = \min\limits_{\boldsymbol{v} \in \mathbb{W}_e(\Omega_e)} \mathbb{J}_e(\boldsymbol{v}), \end{cases} \tag{6.3.21}$$

其中，

$$\mathbb{J}_e(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} A_e(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

对已知 $\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e} = \boldsymbol{u}_e$，我们应用无限多相似单元方法求变分问题 (6.3.20) (即极值问题 (6.3.21)) 的数值近似解。首先对无限大区域 Ω_e 进行三角剖分。选取一个常数 $\xi > 1$，以 $\xi, \xi^2, \cdots, \xi^k, \cdots$ 为比例常数由人工边界 Γ_e (对应 $k = 0$) 可得：

$$\Gamma_e^k = \{(r, \theta) |\ r = \xi^k e(\theta), \ -\pi \leqslant \theta \leqslant 0\}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

由此我们得到了无限多个与人工边界 Γ_e 相似的折线 $\Gamma_e^k (k = 1, 2, \cdots)$。$\Gamma_e^k (k = 1, 2, \cdots)$ 将区域 Ω_e 分割为无限多个相似的多边形子区域：

$$\Omega_k = \{(r, \theta) |\ \xi^{k-1} e(\theta) < r < \xi^k e(\theta), -\pi < \theta < 0\}, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

对第一个多边形子区域 Ω_1 进行三角剖分。在 Γ_e 上取 m 个节点 $\{a_j^0, j = 1, 2, \cdots, m\}$ (包括折线人工边界 Γ_e 的所有顶点)。折线 Γ_e^1 是由 Γ_e 经过相似变换得到的，由同样的变换在折线 Γ_e^1 上可得对应的 m 个节点 $\{a_j^1, j = 1, 2, \cdots, m\}$，将 Γ_e 和 Γ_e^1 上对应的节点，用直线连接起来就将区域 Ω_1 分割为 $m - 1$ 个四边形单元，再将每个四边形单元分割为两个三角形单元 (见图 6-5)，我们就得到了第一个多边形子区域 Ω_1 的一个三角剖分。其他多边形子区域 $\Omega_k (k > 1)$ 都是由 Ω_1 经过相似变换得到的，应用相同的相似变换由 Ω_1 的三角剖分可得 Ω_k 的一个相似三角剖分。这样我们就将区域 Ω_e 剖分为无限多个三角形单元 $\{k\}$，记其为 J_h。

首先构造 $W(\Omega_e)$ 的子空间 $W^h(\Omega_e)$：若 $v \in W^h(\Omega_e)$，则 v 满足：

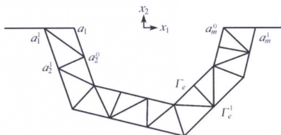


图　6-5

(i)　$v \in C(\overline{\Omega}_e)$,

(ii)　v 在每个三角形单元上是自变量x_1, x_2的线性函数,

(iii)　$\dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2(\Omega_e)$,

(iv)　v有界,　当$|x| \to +\infty$.

令:

$$\mathbb{W}^h(\Omega_e) = \mathbb{W}^h(\Omega_e) \times \mathbb{W}^h(\Omega_e),$$
$$\mathbb{W}_*^h(\Omega_e) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{W}^h(\Omega_e), \boldsymbol{v}|_{\Gamma_e} = 0\},$$
$$\mathbb{W}_e^h(\Omega_e) = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \mathbb{W}^h(\Omega_e), \boldsymbol{v}|_{\Gamma_e}(a_j^0) = \boldsymbol{u}_e(a_j^0), \quad j = 1, \cdots, m\}.$$

$\mathbb{W}^h(\Omega_e)$ 是 $\mathbb{W}(\Omega_e)$ 的子空间，$\mathbb{W}_*^h(\Omega_e)$ 是 $\mathbb{W}_*(\Omega_e)$ 的子空间，但是 $\mathbb{W}^h(\Omega_e)$ 和 $\mathbb{W}_*^h(\Omega_e)$ 都是无限维的。在变分问题 (6.3.20) 中用 $\mathbb{W}_e^h(\Omega_e)$ 和 $\mathbb{W}_*^h(\Omega_e)$ 代替 $\mathbb{W}_e(\Omega_e)$ 和 $\mathbb{W}_*(\Omega_e)$，得到变分问题 (6.3.20) 的近似变分问题:

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{u}_h \in \mathbb{W}_e^h(\Omega_e), \text{ 使} \\ A(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{W}_*^h(\Omega_e). \end{cases} \tag{6.3.22}$$

在极值问题中用 $\mathbb{W}_e^h(\Omega_e)$ 代替 $\mathbb{W}_e(\Omega_e)$ 我们得到近似极值问题:

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{u}_h \in \mathbb{W}_e^h(\Omega_e), \text{ 使} \\ \mathbb{J}_e(\boldsymbol{u}_h) = \min\limits_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{W}_e^h(\Omega_e)} \mathbb{J}_e(\boldsymbol{v}_h). \end{cases} \tag{6.3.23}$$

应用 Lax-Milgram 定理可得：极值问题 (6.3.23) (等价的变分问题 (6.3.22)) 存在唯一解 $\boldsymbol{u}_h \in \mathbb{W}_e(\Omega_e)$。

对于任意 $\boldsymbol{u}_h = (u_1^h, u_2^h)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{W}_e^h(\Omega_e), \boldsymbol{u}_h$ 被其在所有节点 $\{a_j^k, j=0,1,2,\cdots, m\}$ 上的值唯一地确定。记

$$\boldsymbol{Y}_k = \left(u_1^h(a_1^k), u_2^h(a_1^k), \cdots, u_1^h(a_m^k), u_2^h(a_m^k)\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{Y}_k \in \mathbb{R}^{2m}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{6.3.24}$$

则我们有：

定理 6.3.1 若 $\boldsymbol{u}_h$ 是极值问题 (6.3.23) 的解，则其对应的向量组 $\{\boldsymbol{Y}_k,\ k=0,1,\cdots\}$ 满足下面无限阶代数方程组：

$$\begin{cases} \text{已知 } \boldsymbol{Y}_0,\ \text{求}\{\boldsymbol{Y}_k, k=1,2,\cdots\},\ \text{使} \\ \boldsymbol{K}Y_1 - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_0, \\ -\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{k-1} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{k+1} = 0, \quad k=2,3,\cdots, \\ \boldsymbol{Y}_k \text{ 有界}, \quad \text{当} k \to +\infty, \end{cases} \tag{6.3.25}$$

其中 $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_0^{'}$; $\boldsymbol{K}_0, \boldsymbol{K}_0^{'}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 构成每一层 Ω_k 上的刚度矩阵：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_0 & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_0^{'} \end{pmatrix}.$$

证明 对于任意 $\boldsymbol{u}_h \in \mathbb{W}_e^h(\Omega_e)$，首先计算应变能 $\mathbb{J}_e(\boldsymbol{u}_h)$：

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_e(\boldsymbol{u}_h) = & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{\Omega_k}\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2}\right)^2 + 2\mu\left[\left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2^h}{\partial x_2}\right)^2\right]\right. \\ & \left. +\mu\left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^h}{\partial x_1}\right)^2\right\}\mathrm{d}x \\ \equiv & \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{J}_k, \end{aligned} \tag{6.3.26}$$

$\mathbb{J}_k$ 表示位移 $\boldsymbol{u}_h$ 在第 k 层 Ω_k 上的应变能量，在第 k 层上 $\boldsymbol{u}_h$ 由向量 $\boldsymbol{Y}_{k-1}$，和 $\boldsymbol{Y}_k$ 唯一地确定，可通过计算 Ω_k 上的每个单元刚度矩阵得到 $\mathbb{J}_k$：

$$\mathbb{J}_k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_k \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_0 & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_0^{'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_k \end{pmatrix}. \tag{6.3.27}$$

其中 $\boldsymbol{K}_0, \boldsymbol{K}_0^{'}$ 是对称的非负矩阵。在我们讨论的问题中，两个相似单元的刚度矩阵是完全相同的。由于剖分的相似性，每一个单元层 Ω_k 的刚度矩阵都是相同的，即矩阵 $\boldsymbol{K}_0, \boldsymbol{K}_0^{'}, \boldsymbol{A}$ 不依赖于 k。

我们考虑两个相邻单元层 Ω_k, Ω_{k+1} 上的应变能量：

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_k + \mathbb{J}_{k+1} = & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_k \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_0 & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_0^{'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_k \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_k \\ \boldsymbol{Y}_{k+1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_0 & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_0^{'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_k \\ \boldsymbol{Y}_{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.3.28}$$

若 $\boldsymbol{u}_h \in \mathbb{W}_e^h(\Omega_e)$ 是极值问题 (6.3.23) 的解，则 $\boldsymbol{Y}_k$ 满足：

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{k-1}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{k+1}=\boldsymbol{0},\quad k=1,2,\cdots.$$

定理 6.3.1 获证。 ■

为了最终得到原问题 (6.3.1)~(6.3.5) 在人工边界上满足的离散人工边界条件，关键的一步是求解无限阶代数方程组 (6.3.25)，并给出由 Y_0 计算 Y_1 的公式。在下面两小节中我们讨论求解无限阶代数方程组 (6.3.25) 的基本方法。

6.3.3　求解无限阶代数方程组 (6.3.25) 的直接法

为求无限阶代数方程组 (6.3.25) 的解，令：

$$\boldsymbol{Y}_k=\boldsymbol{X}^k\boldsymbol{Y}_0,\quad k=0,1,\cdots \tag{6.3.29}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{(2m)\times(2m)}$ 是待定的。称矩阵 X 为转移矩阵。将 (6.3.29) 代入方程 (6.3.25) 可得转移矩阵 X 满足：

$$-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^2=0. \tag{6.3.30}$$

由问题 (6.3.25) 中 Y_k 在无穷远处满足的条件可得矩阵 X 的附加条件 —— 矩阵 X 的特征值 λ 满足：

$$|\lambda|\leqslant 1. \tag{6.3.31}$$

矩阵方程 (6.3.30)~(6.3.31) 的解 X 即为无限阶代数方程组 (6.3.25) 的转移矩阵。首先介绍求解矩阵方程 (6.3.30)~(6.3.31) 的直接方法 (Ying, 1977)。设 λ 是矩阵 X 的特征值，对应特征向量 $\boldsymbol{g}$，则由矩阵方程 (6.3.30) 可知 (λ, g) 是下面特征值问题的解：

$$\big(-\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{K}-\lambda^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\big)g=\boldsymbol{0}. \tag{6.3.32}$$

令：

$$\boldsymbol{h}=\lambda\boldsymbol{g}, \tag{6.3.33}$$

将 (6.3.33) 代入 (6.3.32) 可得：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}=\lambda\big(\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\big). \tag{6.3.34}$$

记：

$$\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{(2m)\times(2m)}$ 是单位矩阵，则特征值问题 (6.3.32) 等价于下面的矩阵束特征值问题：

$$\boldsymbol{Q}_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{Q}_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \end{pmatrix}. \tag{6.3.35}$$

从上述讨论中我们知道：

(1) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的任意一个特征值 λ (对应特征向量 $\boldsymbol{g}$) 都是矩阵束特征值问题 (6.3.35) 的特征值 (对应特征向量 $(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}, \lambda\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$)。

(2) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的所有特征值 λ 的绝对值 $|\lambda| \leqslant 1$。进一步矩阵束特征值问题 (6.3.35) 的特征方程为：

$$\det\big(\boldsymbol{Q}_1 - \lambda \boldsymbol{Q}_2\big) = 0,$$

它等价于：

$$\det\big(-\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{K} - \lambda^2 \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\big) = 0. \tag{6.3.36}$$

(3) 若 $\lambda \neq 0$ 是矩阵束特征值问题 (6.3.35) 的特征值，即式 (6.3.36) 成立，则由等式 (6.3.36) 可得：

$$\begin{aligned} &\det\Big(-A + \frac{1}{\lambda}K - \frac{1}{\lambda^2}A^{\mathrm{T}}\Big) \\ =&\det\{\lambda^{-2}\big(-A\lambda^2 + \lambda K - A^{\mathrm{T}}\big)\} \\ =&\det\{\lambda^{-2}\big(-A + \lambda K - \lambda^2 A^{\mathrm{T}}\big)\} = 0, \end{aligned}$$

即 λ^{-1} 也是矩阵束特征值问题 (6.3.35) 的特征值。

(4) 可以直接验证 $\lambda = 1$ 是矩阵束特征值问题 (6.3.35) 的二重特征值，对应特征向量 $(\boldsymbol{g}_{10}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{g}_{10}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 和 $(\boldsymbol{g}_{01}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{g}_{01}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，其中，

$$\boldsymbol{g}_{10}^{\mathrm{T}} = (1,0,1,0,\cdots,1,0) \in \mathbb{R}^{2m}, \quad \boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}} = (0,1,0,1,\cdots,0,1) \in \mathbb{R}^{2m}.$$

由上面的分析可得求解无限阶代数方程组 (6.3.25) 转移矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的直接方法：

步骤 1. 求出矩阵束特征值问题 (6.3.35) 的全部特征值 $\{\lambda_i\}$ 和对应的特征向量：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_i \\ \lambda_i \boldsymbol{g}_i \end{pmatrix}, i = 1,2,\cdots,4m.$$

步骤 2. 根据条件 (6.3.31) 从步骤 1 得到的 $4m$ 个特征值中选出 $2m$ 个绝对值小于等于 1 的特征值和对应的特征向量。记为：

$$\big\{\lambda_i, \boldsymbol{g}_i, i = 1,2,\cdots,2m\big\},$$

则 $\big\{\lambda_i, i = 1,2,\cdots,2m\big\}$ 是转移矩阵 X 的全部特征值，对应特征向量 $\big\{\boldsymbol{g}_i, i = 1,2,\cdots,2m\big\}$。

步骤 3. 由步骤 1, 2 得转移矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的全部特征值和特征向量的信息后，根据矩阵的 Jordan 标准形理论可构造出转移矩阵 $\boldsymbol{X}$。令：

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_{2m}) \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}.$$

(i) 如果矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的，我们知道矩阵 X 的 Jordan 标准形为 $2m$ 阶对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{Diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2m-1}, \lambda_{2m}\}.$$

由

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{g}_i = \lambda_i \boldsymbol{g}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, 2m, \tag{6.3.37}$$

可得：

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda},$$

即：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{6.3.38}$$

在应用公式 (6.3.38) 求转移矩阵 X 时，为了避免复数运算，可将公式 (6.3.38) 进行变形。由于转移矩阵 X 是实矩阵，$\boldsymbol{X}$ 的复特征值 λ 和对应的特征向量 $\boldsymbol{g}$ 都是共轭成对出现的。例如若 $\lambda_k, \lambda_{k+1} (\lambda_{k+1} = \overline{\lambda}_k)$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的一对共轭复特征值，对应特征向量 $\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}_{k+1} = \overline{\boldsymbol{g}}_k$。

令：

$$\lambda_k = \alpha + \mathrm{i}\beta, \quad \boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{p} + \mathrm{i}\boldsymbol{q},$$

则：

$$\lambda_{k+1} = \alpha - \mathrm{i}\beta, \quad \boldsymbol{g}_{k+1} = \boldsymbol{p} - \mathrm{i}\boldsymbol{q}.$$

由式 (6.3.37)，可得：

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p} - \beta\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{X}\boldsymbol{q} = \beta\boldsymbol{p} + \alpha\boldsymbol{q},$$

即：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

用实向量 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 代替转移矩阵 P 中的第 k 列和 $k+1$ 列，用实矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

代替矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角线上二阶子块

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \lambda_{k+1} \end{pmatrix}.$$

这样可以将转移矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的所有列向量换为实向量，同时将 $\boldsymbol{\Lambda}$ 换为实的块对角形阵。此时由公式 (6.3.38) 经过实数的运算即可得转移矩阵 $\boldsymbol{X}$。

(ii) 若转移矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的 Jordan 标准形不是对角阵，则转移矩阵 X 的 Jordan 标准形是分块对角矩阵：

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{\Lambda}_s(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

其中，

$$\boldsymbol{\Lambda}_j(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}_{k_i \times k_i}, \quad j = 1, 2, \cdots, s.$$

通过求出 $\boldsymbol{X}$ 的特征向量和广义特征向量，由 Jordan 标准形理论可得可逆矩阵 P，使

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

在大多数实际应用中遇到的是第一种情况。直接方法求解无限阶代数方程组 (6.3.25) 的主要工作量是求解矩阵束特征值问题 (6.3.35) 的特征值和特征向量。

求出转移矩阵 $\boldsymbol{X}$ 后，我们立刻得到无限阶代数方程组的解

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{X}^k \boldsymbol{Y}_0, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{6.3.39}$$

由 $\{\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{Y}_1, \cdots, \boldsymbol{Y}_k, \cdots\}$ 在 Ω_e 上构造插值函数 $\boldsymbol{u}_h = (u_1^h, u_2^h) \in \mathbb{W}_e^h(\Omega_e)$ 并且

$$\boldsymbol{Y}_k = \left(u_1^h(a_1^k), u_2^h(a_1^k), \cdots, u_1^h(a_m^k), u_2^h(a_m^k)\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.3.40}$$

则 $\boldsymbol{u}_h$ 是极值问题 (6.3.23) 的解。计算应变能：

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_e(\boldsymbol{u}_h) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_k \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_0 & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_{k-1} \\ \boldsymbol{Y}_k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\boldsymbol{Y}_{k-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{Y}_{k-1} - \boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Y}_{k-1} - \boldsymbol{Y}_{k-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Y}_k + \boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_0' \boldsymbol{Y}_k\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}_0-\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}_0\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{k-1}+\boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0'\boldsymbol{Y}_k\right.\\
&\quad\left.+\boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{k+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{Y}_k^{\mathrm{T}}\left(-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_{k-1}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{k+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{Y}_0.
\end{aligned}
$$

令：

$$
\boldsymbol{K}_Z=\boldsymbol{K}_0-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}, \tag{6.3.41}
$$

称 $\boldsymbol{K}_Z$ 为组合刚度矩阵，即

$$
\mathbb{J}_e(\boldsymbol{u}_h)=\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_Z\boldsymbol{Y}_0. \tag{6.3.42}
$$

求出转移矩阵 $\boldsymbol{X}$ 后，在人工边界 Γ_e 和 Γ_e^1 上立刻得到了一个离散人工边界条件：

$$
\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}_0. \tag{6.3.43}
$$

求出转移矩阵 X 后由等式 (6.3.41) 可得到组合刚度矩阵 K_Z，并立刻得到由 Steklov-Poincare 映射 $\mathbb{T}$ 产生的双线性形式

$$
B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e})\cdot\boldsymbol{v}|_{\Gamma_e}\mathrm{d}s
$$

的数值近似，即：

$$
\int_{\Gamma_e}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}|_{\Gamma_e})\cdot\boldsymbol{v}|_{\Gamma_e}\mathrm{d}s\approx\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_Z\boldsymbol{Z}_0, \tag{6.3.44}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_0&=\left(u_1(a_1^0),u_2(a_1^0),\cdots,u_1(a_m^0),u_2(a_m^0)\right)^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{Z}_0&=\left(v_1(a_1^0),v_2(a_1^0),\cdots,v_1(a_m^0),v_2(a_m^0)\right)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

表示 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 在人工边界 Γ_e 的节点 $\left\{a_j^0,j=1,2,\cdots,m\right\}$ 上的值。可直接应用公式 (6.3.44) 将原问题 (6.1.1)~(6.1.5) 简化，在有界区域 Ω_i 进行数值计算。下面给出计算组合刚度矩阵 K_Z 的一个快速迭代算法。

6.3.4 计算组合刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_Z$ 的快速算法

假设 $\boldsymbol{u}_h\in\mathbb{W}^h(\Omega_e)$ 是极值问题 (6.3.23) 的解，对应于 $\boldsymbol{u}_h$ 的向量组 $\left(Y_k\in R^{2m},k=0,1,\cdots\right)$ 满足无限阶代数方程组 (6.3.25)。我们讨论两个相邻单元层 (例如 Ω_1 和 Ω_2) 上的刚度矩阵，考虑：

$$
\mathbb{J}_1(\boldsymbol{u}_h)+\mathbb{J}_2(\boldsymbol{u}_h)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \boldsymbol{Y}_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_0 & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \boldsymbol{Y}_1\end{pmatrix}
+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_0 & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{K}_0'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\end{pmatrix}. \tag{6.3.45}
$$

由方程 (6.3.25)

$$
-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_0+(\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_0')\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{0},
$$

可得：

$$
\boldsymbol{Y}_1=(\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_0')^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_2).
$$

将上式代入 (6.3.45)，经过整理可得：

$$
\mathbb{J}_1(\boldsymbol{u}_h)+\mathbb{J}_2(\boldsymbol{u}_h)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \boldsymbol{Y}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{K}_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \boldsymbol{Y}_2\end{pmatrix},
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_1&=\boldsymbol{K}_0-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_0')\boldsymbol{A},\\
\boldsymbol{K}_1'&=\boldsymbol{K}_0'-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_0')^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{A}_1&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}_0+\boldsymbol{K}_0')^{-1}\boldsymbol{A},
\end{aligned}
$$

由此可得相邻两层的单元刚度矩阵：

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{K}_1'\end{pmatrix}.
$$

用完全类似的方法可以得到相邻四个单元层的刚度矩阵，一般地如果已知相邻 2^{N-1} 个单元层的刚度矩阵

$$
\boldsymbol{G}_{N-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{N-1} & -\boldsymbol{A}_{N-1}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{A}_{N-1} & \boldsymbol{K}_{N-1}'\end{pmatrix},
$$

则可得相邻 2^N 个单元层的刚度矩阵：

$$
\boldsymbol{G}_{N}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{N} & -\boldsymbol{A}_{N}^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{A}_{N} & \boldsymbol{K}_{N}'\end{pmatrix},
$$

其中，

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{K}_N=\boldsymbol{K}_{N-1}-\boldsymbol{A}_{N-1}^{T}\left(\boldsymbol{K}_{N-1}+\boldsymbol{K}_{N-1}'\right)^{-1}\boldsymbol{A}_{N-1},\\
\boldsymbol{K}_N'=\boldsymbol{K}_{N-1}'-\boldsymbol{A}_{N-1}\left(\boldsymbol{K}_{N-1}+\boldsymbol{K}_{N-1}'\right)^{-1}\boldsymbol{A}_{N-1}^{T},\\
\boldsymbol{A}_N=\boldsymbol{A}_{N-1}\left(\boldsymbol{K}_{N-1}+\boldsymbol{K}_{N-1}'\right)^{-1}\boldsymbol{A}_{N-1},\quad N=1,2,\cdots,\\
\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{A}.
\end{cases} \tag{6.3.46}
$$

由公式 (6.3.46) 得到矩阵序列 $\{\boldsymbol{K}_N\},\{\boldsymbol{K}_N'\},\{\boldsymbol{A}_N\}$。由于 $\boldsymbol{K}_0,\boldsymbol{K}_0'$ 是正定的，可以证明矩阵 $\boldsymbol{K}_N$ 和 $\boldsymbol{K}_N'$ 也是正定的。应用论文 (Han and Ying, 1979) 给出的方法，可以证明当 $N\to+\infty$ 时，矩阵序列 $\{\boldsymbol{K}_N\},\{\boldsymbol{K}_N'\},\{\boldsymbol{A}_N\}$ 是收敛的。进一步我们讨论如何由 $\boldsymbol{K}_N,\boldsymbol{K}_N',\boldsymbol{A}_N$ (当 N 足够大) 计算组合刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_Z$。

对任意给定的 $2m$ 维向量 $\boldsymbol{Y}_0\in\mathbb{R}^{2m}$，考虑变分问题：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{找 } \alpha_N,\beta_N\in\mathbb{R},\text{ 使}\\ \mathbb{J}^N(\boldsymbol{Y}_0,\alpha_N\boldsymbol{g}_{10}+\beta_N\boldsymbol{g}_{01})=\min\limits_{\alpha,\beta\in R}\mathbb{J}^N(\boldsymbol{Y}_0,\alpha\boldsymbol{g}_{10}+\beta\boldsymbol{g}_{01}),\end{array}\right.\tag{6.3.47}$$

其中，

$$\begin{aligned}&\mathbb{J}^N(\boldsymbol{Y}_0,\alpha\boldsymbol{g}_{10}+\beta\boldsymbol{g}_{01})\\ =&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \alpha\boldsymbol{g}_{10}+\beta\boldsymbol{g}_{01}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_N & -\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\\ -\boldsymbol{A}_N & \boldsymbol{K}_N'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}_0\\ \alpha\boldsymbol{g}_{10}+\beta\boldsymbol{g}_{01}\end{pmatrix}\\ =&\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_N\boldsymbol{Y}_0-\alpha\boldsymbol{g}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{Y}_0-\beta\boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{Y}_0\\ &+\frac{\varepsilon_N}{2}\alpha^2+\frac{\delta_N}{2}\beta^2+\gamma_N\alpha\beta\geqslant 0,\end{aligned}\tag{6.3.48}$$

并且，

$$\varepsilon_N=\boldsymbol{g}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_N'\boldsymbol{g}_{10},\quad \delta_N=\boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_N'\boldsymbol{g}_{01},\quad \gamma_N=\boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_N'\boldsymbol{g}_{10}.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{K}_N'$ 是正定的，因而：

$$\frac{\varepsilon_N}{2}\alpha^2+\frac{\delta_N}{2}\beta^2+\gamma_N\alpha\beta=\frac{1}{2}\big(\alpha\boldsymbol{g}_{10}+\beta\boldsymbol{g}_{01}\big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_N'\big(\alpha\boldsymbol{g}_{10}+\beta\boldsymbol{g}_{01}\big)\geqslant 0.$$

上式等号只在 $\alpha=\beta=0$ 时成立，由此可得：

$$\Delta\equiv\varepsilon_N\delta_N-\gamma_N^2\neq 0.$$

问题 (6.3.47) 是一个二次函数的极值问题，可得到它的解：

$$\alpha_N=\frac{1}{\Delta}\big(\delta_N\boldsymbol{g}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{Y}_0-\gamma_N\boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{Y}_0\big),$$

$$\beta_N=\frac{1}{\Delta}\big(-\gamma_N\boldsymbol{g}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{Y}_0+\varepsilon_N\boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{Y}_0\big).$$

将上式代入 (6.3.47) 的右端，可得：

$$\mathbb{J}^N\big(\boldsymbol{Y}_0,\alpha_N\boldsymbol{g}_{10}+\beta_N\boldsymbol{g}_{01}\big)=\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{K}_N+\boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{A}_N\big)\boldsymbol{Y}_0,$$

其中，

$$\boldsymbol{F}_N = \frac{1}{\Delta}\{ - \delta_N \boldsymbol{g}_{10}\boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}} - \varepsilon_N \boldsymbol{g}_{01}\boldsymbol{g}_{01}^{T} + \gamma_N \boldsymbol{g}_{01}\boldsymbol{g}_{10}^{\mathrm{T}} + \gamma_N \boldsymbol{g}_{10}\boldsymbol{g}_{01}^{\mathrm{T}}\}.$$

这样我们就得到一个新的矩阵序列 $\{\boldsymbol{K}_N + \boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{A}_N\}$，应用在论文 (Han and Ying, 1979) 定理 1 中给出的方法可证明矩阵序列 $\{\boldsymbol{K}_N + \boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{A}_N\}$ 收敛于组合刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_Z$，即：

$$\lim_{N\to+\infty}\{\boldsymbol{K}_N + \boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{A}_N\} = \boldsymbol{K}_Z. \tag{6.3.49}$$

由此给出了计算刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_Z$ 的快速迭代方法：

$$\boldsymbol{K}_Z \approx \boldsymbol{K}_N + \boldsymbol{A}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_N\boldsymbol{A}_N. \tag{6.3.50}$$

在实际计算时一般 N 取为 5 或 6 即可得到非常好的数值结果 (Han and Ying, 1977; Ying and Han, 1980)。

6.4 一维 Klein-Gordon 方程的离散完全吸收人工边界条件——Z 变换方法

6.4.1 Z 变换

Z 变换是对序列进行运算的一种工具，它与 Laplace 变换有很多类似的性质。它们的主要区别是 Laplace 变换是对连续变量 t 的函数 $f(t)$ 进行运算，而 Z 变换是对整数值变量 n 的序列 $\{f_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 进行运算 (Muth, 1977)。Z 变换是一种映射算子，将序列 $\{f_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 映射为复数域上的函数 $F(Z)$，称函数 $F(Z)$ 为序列 $\{f_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 的 Z 变换或序列 $\{f_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 的象。

对任给的序列 $\{f_n,\ n=0,1,\cdots\}$，它的 Z 变换定义为：

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n Z^{-n}. \tag{6.4.1}$$

记：

$$\mathbb{Z}\{f_n\} = F(Z),$$

将反变换记为：

$$\mathbb{Z}^{-1}\{F(Z)\} = \{f_n\}.$$

从 Z 变换的定义中可知 $F(Z)$ 是以序列 $\{f_n,\ n=0,1,\cdots\}$ 为系数的罗朗级数 (6.4.1)。只有在罗朗级数收敛的区域上象函数 $F(Z)$ 才存在。Z 变换的主要性质有：

1. 线性：已知序列 $\{f_n\},\{g_n\}$ 对应的 Z 变换为 $F(Z),G(Z)$，设 a 和 b 为任意常数，则：

$$\mathbb{Z}\{af_n+bg_n\}=aF(Z)+bG(Z). \tag{6.4.2}$$

2. 向左移位：已知序列 $\{f_n\}$，设 $\{g_n\}$ 是由序列向左移动 k 个位置得到的，即：

$$g_n=f_{n+k},\quad n=0,1,\cdots,$$

则序列 $\{g_n\}$ 的 Z 变换为：

$$G(z)=Z^kF(Z)-\sum_{n=0}^{k-1}f_nZ^{-n}. \tag{6.4.3}$$

3. 向右移位：已知序列 $\{f_n\}$，设 $\{g_n\}$ 是由序列向右移动个位置得到的，即：

$$g_n=\begin{cases}f_{n-k}, & n=k,k+1,\cdots,\\ 0, & n=0,1,\cdots,k-1.\end{cases}$$

则序列 $\{g_n\}$ 的 Z 变换为：

$$G(z)=Z^{-k}F(Z). \tag{6.4.4}$$

4. $\{f_n\}$ 的求和：已知序列 $\{f_n\}$，令：

$$g_n=\sum_{k=0}^{n}f_k,$$

则序列 $\{g_n\}$ 的 Z 变换为：

$$G(z)=\frac{Z}{Z-1}F(Z). \tag{6.4.5}$$

5. 卷积：已知序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$，定义它们的卷积 $\{f_n*g_n\}$ 为：

$$f_n*g_n=\sum_{k=0}^{+\infty}f_{n-k}g_k,$$

则卷积 $\{f_n*g_n\}$ 的 Z 变换为：

$$\mathbb{Z}\{f_n*g_n\}=F(Z)G(Z). \tag{6.4.6}$$

6. 始值定理和终值定理：已知 $F(Z)$ 是序列 $\{f_n\}$ 的 Z 变换，则 (始值定理)：

$$f_0 = \lim_{Z\to\infty} F(Z), \tag{6.4.7}$$

$$f_n = \lim_{Z\to\infty} Z_n\left(FZ - \sum_{k=0}^{n-1} f_k Z^{-k}\right). \tag{6.4.8}$$

进一步假设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 存在，则 (终值定理)：

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{Z\to 1}(Z-1)F(Z) = \lim_{Z\to 1}\frac{Z-1}{Z}F(Z). \tag{6.4.9}$$

7. 反变换：已知 $F(Z)$ 是序列 $\{f_n\}$ 的 Z 变换，则称序列 $\{f_n\}$ 为象函数 $F(Z)$ 的反变换，反变换是唯一的。因而序列与其象函数是一一对应的。已知象函数 $F(Z)$ 求其 Z 反变换的方法在 Muth (1977) 的书中有详尽的讨论。

Z 变换为构造发展方程的离散人工边界条件提供了一个强有力的工具。例如 Arnold, A., Ehrharht, M. and Sofronov, I. (2003) 应用 Z 变换方法构造了一维线性 Schrödinger 方程的离散人工边界条件。在这一节中我们以一维线性 Klein-Gordon 方程为例介绍应用 Z 变换方法构造离散人工边界条件的过程。

6.4.2 离散完全吸收人工边界条件

这里我们再一次讨论一维 Klein-Gordon 方程的初值问题，并取 $a = b = 1$：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = f(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^1,\ t\in(0,\infty), \tag{6.4.10}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad u_t|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}^1, \tag{6.4.11}$$

其中 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), f(x,t)$ 满足 4.1.1 节中的条件。取时间步长 Δt，空间步长 Δx, $\Delta x = \dfrac{1}{I}$，其中 I 是正整数。记 $\alpha = \left(\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$，并假设 $\alpha < 1$。令：

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \quad t_n = n\Delta t, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

区域 $\mathbb{R}^1 \times [0,\infty)$ 被直线

$$x = x_i, \quad i = 0,\pm1,\pm2,\cdots, \quad t = t_n, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

分割为网格，以 u_i^n 表示初值问题 (6.4.1)~(6.4.2) 的解 $u(x,t)$ 在节点 (x_i,t_n) 上的近似值，可得初值问题 (6.4.1)~(6.4.2) 的差分方程：

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + u_i^n$$

$$= -f_{i,n},\ i = 0,\pm1,\cdots,\ n = 1,2,\cdots, \tag{6.4.12}$$

$$u_i^0 = \varphi_0(x_i), \quad u_i^1 = u_i^0 + \Delta t\varphi_1(x_i), \quad i = 0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{6.4.13}$$

其中 $f_{i,n}=f(x_i,t_n)$。由于支集 $\mathrm{Supp}\{\varphi_0(x)\}\subset[0,1]$，支集 $\mathrm{Supp}\{\varphi_1(x)\}\subset[0,1]$，和支集 $\mathrm{Supp}\{f(x,t)\}\subset[0,1]\times(0,\infty)$ 可知：

$$u_i^0=0,\quad u_i^1=0,\quad i=I,I+1,\cdots,\quad \text{和}\quad i=0,-1,-2,\cdots,$$
$$f_{i,n}=0,\quad i=I,I+1,\cdots,\quad \text{和}\quad i=0,-1,-2,\cdots;\quad n=0,1,\cdots.$$

为了将差分方程简化在有界区域上进行计算，令：

$$\varSigma_{I+1}^h=\{(x_{I+1},t_n)\ ||\ n=0,1,\cdots\}$$
$$\varSigma_{-1}^h=\{(x_{-1},t_n)\ ||\ n=0,1,\cdots\}$$

我们试图在 $\varSigma_{I+1}^h$ 和 $\varSigma_{-1}^h$ 上找出差分方程 (6.4.12)~(6.4.13) 的解满足的离散边界条件。首先考虑问题 (6.4.12)~(6.4.13) 的解 $\{u_i^n,\ i=0,\pm1,\pm2,\cdots;n=0,1,2,\cdots\}$ 的限制 $\{u_i^n,\ i=I,I+1,\cdots;\ n=0,1,2,\cdots\}$，它满足下面的差分方程和初始条件：

$$\frac{u_i^{n+1}-2u_i^n+u_i^{n-1}}{\Delta t^2}-\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}+u_i^n$$
$$=0,\ i=I+1,I+2,\cdots,\ n=1,2,\cdots,\tag{6.4.14}$$

$$u_i^0=\varphi_0(x_i)=0,\quad u_i^1=u_i^0+\Delta t\varphi_1(x_i)=0,\quad i=I,I+1,\cdots.\tag{6.4.15}$$

由于 $\{u_I^n,\ n=2,3,\cdots,\}$ 是未知的，因而差分方程 (6.4.14)~(6.4.15) 的提法是不完全的。如果已知 $\{u_I^n,\ n=2,3,\cdots\}$，则问题 (6.4.14)~(6.4.15) 有唯一解。下面应用 Z 变换方法求出问题 (6.4.14)~(6.4.15) 的解。对固定的 $i\geqslant I$，对序列 $\{u_i^n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 做 Z 变换，记：

$$\mathbb{Z}\{u_i^n\}=U_i(Z).\tag{6.4.16}$$

由初条件 (6.4.15)，默认 $u_i^{-1}=0$，则

$$\mathbb{Z}\{u_i^{n+1}\}=ZU_i(Z),\quad \mathbb{Z}\{u_i^{n-1}\}=\frac{1}{Z}U_i(Z).$$

由差分方程 (6.4.14)~(6.4.15) 得到：

$$ZU_i(Z)-2U_i(Z)+\frac{1}{Z}U_i(Z)-\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(U_{i+1}(Z)-2U_i(Z)$$
$$+U_{i-1}(Z))+(\Delta t)^2U_i(Z)=0,\quad i=I+1,I+2,\cdots.$$

记：

$$\alpha=\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2,$$

$$\beta(Z) = 2\alpha + (\Delta t)^2 - 2 + Z + \frac{1}{Z}.$$

则 $\{U_i(Z), i = I, I+1, \cdots\}$ 满足下面问题：

$$-\alpha U_{i+1}(Z)+\beta(Z)U_i(Z)-\alpha U_{i-1}(Z)=0, \quad i=I+1, I+2, \cdots, \tag{6.4.17}$$

$$U_i(Z) \to 0, \quad i \to +\infty. \tag{6.4.18}$$

假设

$$U_i(Z) = (\Lambda(Z))^{i-I} U_I(Z), \quad i = I+1, I+2, \cdots, \tag{6.4.19}$$

为问题 (6.4.17)~(6.4.18) 的解，则 $\Lambda(Z)$ 满足：

$$\alpha \Lambda^2(Z) - \beta(Z)\Lambda(Z) + \alpha = 0. \tag{6.4.20}$$

由方程 (6.4.20) 和条件 (6.4.18) 得到：

$$\Lambda(Z) = \frac{\beta(Z) - \sqrt{\beta^2(Z) - 4\alpha^2}}{2\alpha}. \tag{6.4.21}$$

进一步可得 $\Lambda(Z)$ 的罗朗展开：

$$\Lambda(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n Z^{-n}. \tag{6.4.22}$$

由此可得 $\Lambda(Z)$ 的反变换：

$$Z^{-1}\{\Lambda(Z)\} = \{\lambda_n\}. \tag{6.4.23}$$

应用公式 (6.4.19) 和卷积定理可得：

$$U_{I+1}(Z) = \Lambda(Z) U_I(Z), \tag{6.4.24}$$

$$u_{I+1}^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n-k} u_I^k, \quad n = 2, 3, \cdots. \tag{6.4.25}$$

公式 (6.4.25) 是问题 (6.4.12)~(6.4.13) 的解在 Σ_{I+1}^h 上满足的离散完全吸收边界条件。完全类似地考虑问题 (6.4.12)~(6.4.13) 的解 $\{u_i^n,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots;\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的限制 $\{u_i^n,\ i = 0, -1, -2, \cdots;\ n = 0, 1, 2, \cdots\}$, 在 Σ_{-1}^h 我们得到：

$$U_{-1}(Z) = \Lambda(Z) U_0(Z), \tag{6.4.26}$$

$$u_{-1}^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n-k} u_0^k, \quad n = 2, 3, \cdots. \tag{6.4.27}$$

公式 (6.4.25) 和 (6.4.27) 是问题 (6.4.12)~(6.4.13) 的解在 Σ_{I+1}^h 和 Σ_{-1}^h 上满足的离散完全吸收人工边界条件。

6.4.3 在有界区域上一维 Klein-Gordon 方程初值问题的差分近似

应用离散完全吸收人工边界条件 (6.4.25) 和 (6.4.27) 可将差分方程 (6.4.12), (6.4.13) 简化到有界区域上:

$$\frac{u_i^{n+1}-2u_i^n+u_i^{n-1}}{\Delta t^2}-\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}+u_i^n=f_{i,n},$$
$$i=0,1,2,\cdots,I;\ n=1,2,\cdots, \tag{6.4.28}$$

$$u_{I+1}^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_{n+1-k}u_I^k,\quad n=1,2,\cdots. \tag{6.4.29}$$

$$u_{-1}^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_{n+1-k}u_0^k,\quad n=1,2,\cdots. \tag{6.4.30}$$

$$u_i^0=\varphi_0(x_i),u_i^1=u_i^0+\Delta t\varphi_1(x_i),\quad i=-1,0,1,\cdots,I+1. \tag{6.4.31}$$

从前面的分析可知差分方程 (6.4.12), (6.4.13) 和差分方程 (6.4.28)~(6.4.31) 是等价的, 即若 $\{u_i^n,\ i=0,\pm1,\pm2,\cdots;\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是差分方程 (6.4.12)~(6.4.13) 的解, 则它的限制 $\{u_i^n,\ i=-1,0,1,2,\cdots,I+1;\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是差分方程 (6.4.28)~(6.4.31) 的解。反之若 $\{u_i^n,\ i=-1,0,1,2,\cdots,I+1;\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是差分方程 (6.4.28)~(6.4.31) 的解, 则它是差分方程 (6.4.12)~(6.4.13) 的解 $\{u_i^n,\ i=0,\pm1,\pm2,\cdots;\ n=0,1,2,\cdots\}$ 的限制。

假设问题 (6.4.10), (6.4.11) 的解 $u(x,t)$ 足够光滑, 并且 $0<\alpha<1$。应用标准的分析方法 (Morton and Mayers, 2005) 可知差分方程 (6.4.12), (6.4.13) 是稳定的, 并且有二阶精度的误差估计。因而我们得到的差分方程 (6.4.28)~(6.4.31) 是稳定的, 也有二阶精度的误差估计。本节的主要内容来自论文 (Han and Zhang, 2009)。

本章内容的主要参考文献为: Bao and Han (1999); Han and Bao (1999); Han, Lu and Bao (1994); Ying (1977), Han and Ying (1979): Arnold, Ehrharht and Sofronov (2003)。其他相关的问题可参阅 Xanthis and Schwab (1991); Thatcher (1976); Han, Bao and Wang (1997); Han and Huang (1999-A, 1999-B, 2001-A, 2001-B)。

第 7 章　隐式人工边界条件

在这一章中我们应用以位势理论为基础的边界积分方程方法在任意形状的人工边界上构造出隐式人工边界条件，以打破对人工边界形状的限制 (例如对二维二阶椭圆型方程外问题的人工边界可选为任意光滑的闭曲线)。我们将讨论 Poisson 方程的外问题，Helmholtz 方程的外问题，Navier 方程组的外问题，声波在空间中的传播问题等。在任意形状的人工边界上构造出隐式人工边界条件后可将定义在无界区域上的问题等价地简化为有界区域上的问题进行数值计算。

7.1　二维 Poisson 方程外问题的隐式边界条件

我们再一次讨论下面二维 Poisson 方程外问题:

$$-\Delta u = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{7.1.1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{7.1.2}$$

$$\text{当}|x| \to +\infty\text{时，}u\text{有界}. \tag{7.1.3}$$

其中 $\Omega \in \mathbb{R}^2$ 是以 Γ 为边界的外区域。问题 (7.1.1)~(7.1.3) 就是 1.1 节中的问题 (1.2.1)~(1.2.3)。在 1.1 节中在圆周人工边界 $\Gamma_R = \{x \mid |x| = R\}$ 上，我们得到了问题的整体人工边界条件。

在这一节中引进任意形状的人工边界 Γ_A:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(s), \\ x_2 &= x_2(s). \end{aligned}\right\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \tag{7.1.4}$$

并且 $x_1(0) = x_1(l)$, $x_2(0) = x_2(l)$。

$\Gamma_A \subset \Omega$ 是一条简单光滑闭曲线，Γ_A 将外区域 Ω 分割为有界区域 Ω_i 和无界区域 Ω_e (见图 7-1)，并假设 $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \Omega_e$。在任意形状的人工边界 Γ_A 上，如何找出问题 (7.1.1)~(7.1.3) 的解 u 满足的边界条件？我们将应用位势理论和边界积分方程方法回答上述问题。

7.1.1　二维 Laplace 方程的单层位势、双层位势和它们的微商

考虑二维 Laplace 方程:

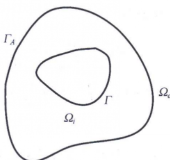


图　7-1

$$-\Delta u(x)=0, \tag{7.1.5}$$

它的基本解为 (Kythe, 1996):

$$E(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}^2. \tag{7.1.6}$$

基本解 $E(x,y)$ 满足:

$$-\Delta_y E(x,y)=\delta(x-y). \tag{7.1.7}$$

设 Γ_A 将 $\mathbb{R}^2$ 分割为有界区域 Ω_A 和无界区域 Ω_e。对于 Γ_A 上的已知函数 $\mu(x)$ 和 $\rho(x)$。令:

$$v_I(x)=\int_{\Gamma_A}\mu(y)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y,\quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{7.1.8}$$

$$v_{II}(x)=\int_{\Gamma_A}\rho(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y,\quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{7.1.9}$$

其中 $n_y=(n_y^1,n_y^2)^{\mathrm{T}}$ 表示在点 $y\in\Gamma_A$ 上区域 Ω_e 的单位外法向向量。

称由式 (7.1.8) 和式 (7.1.9) 定义的函数 $v_I(x)$ 和 $v_{II}(x)$ 为对应于密度函数 $\mu(x)$ 和 $\rho(x)$ 的单层位势和双层位势。

首先我们叙述若干古典位势理论的结果 (Chen and Zhou, 1992)。假设密度函数 $\mu(x)$, $\rho(x)$ 在 Γ_A 上连续，则下面引理成立:

引理 7.1.1　单层位势 $v_I(x)$ 和双层位势 $v_{II}(x)$ 在 $\mathbb{R}^2\setminus\Gamma_A$ 上处处连续可微，并且满足 Laplace 方程 (7.1.5)。■

引理 7.1.2　单层位势 $v_I(x)$ 在每一点 $x\in\mathbb{R}^2$ 上一致收敛，而且在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义了一个连续函数。■

引理 7.1.3　双层位势 $v_{II}(x)$ 在全平面上有定义，在曲线 Γ_A 上有如下第一

类间断，即对任意 $x \in \Gamma_A$，我们有：

$$\lim_{x' \to x, x' \in \Omega_A} v_{II}(x') = -\pi\rho(x) + \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y| \mathrm{d}s_y, \tag{7.1.10}$$

$$\lim_{x' \to x, x' \in \Omega_e} v_{II}(x') = \pi\rho(x) + \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y| \mathrm{d}s_y. \tag{7.1.11}$$

■

我们分别在闭区域 $\overline{\Omega_A}$ 和 $\overline{\Omega_e}$ 上定义连续的双层位势函数：

$$v_{II}^{-}(x) = \begin{cases} v_{II}(x), & \forall\, x \in \Omega_A, \\ -\pi\rho(x) + \displaystyle\int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y| \mathrm{d}s_y, & \forall\, x \in \Gamma_A, \end{cases}$$

$$v_{II}^{+}(x) = \begin{cases} v_{II}(x), & \forall\, x \in \Omega_e, \\ \pi\rho(x) + \displaystyle\int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y| \mathrm{d}s_y, & \forall\, x \in \Gamma_A. \end{cases}$$

下面我们研究单层位势在 Γ_A 上的外法向微商。对于任意 $x \in \Gamma_A$ 我们采用下面的记号定义单层位势在 Γ_A 的外侧和内侧的外法向微商：

$$\frac{\partial v_I(x)}{\partial n_x^-} = \lim_{x' \to x, x' \in n^-} \frac{v_I(x') - v_I(x)}{|x - x'|}, \tag{7.1.12}$$

$$\frac{\partial v_I(x)}{\partial n_x^+} = \lim_{x' \to x, x' \in n^+} \frac{v_I(x) - v_I(x')}{|x - x'|}, \tag{7.1.13}$$

其中 n^+，n^- 分别表示过点 $x \in \Gamma_A$ 上的法线在 Ω_e 和 Ω_A 的部分 (见图 7-2)。

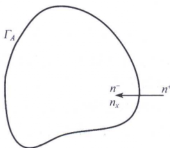


图　7-2

引理 7.1.4　单层位势 $v_I(x)$ 在点 $x \in \Gamma_A$ 存在外侧和内侧的外法向导数，并且，

$$\frac{\partial v_I(x)}{\partial n_x^-} = \int_{\Gamma_A} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln|x-y| \mathrm{d}s_y + \pi\mu(x), \tag{7.1.14}$$

$$\frac{\partial v_I(x)}{\partial n_x^+} = \int_{\Gamma_A} \mu(y) \frac{\partial}{\partial n_x} \ln|x-y| \mathrm{d}s_y - \pi\mu(x). \tag{7.1.15}$$

■

引理 7.1.5　单层位势 $v_I(x)$ 在任意一点 $x \in \Gamma_A$ 存在连续的切向微商，并且，

$$\frac{\partial v_I(x)}{\partial s_x} = \int_{\Gamma_A} \mu(y) \frac{\partial}{\partial s_x} \ln|x-y| \mathrm{d}s_y, \tag{7.1.16}$$

其中 $s_x = (-n_x^2,\ n_x^1)^{\mathrm{T}}$ 与单位外法向 $n_x = (n_x^1,\ n_x^2)^{\mathrm{T}}$ 垂直。 ■

进一步我们研究双层位势 $v_{II}(x)$ 在边界 Γ_A 上的外法向微商。首先有下面的引理 (Han, 1988)。

引理 7.1.6　对任意 $x,\ y \in \mathbb{R}^2$，若 $x \neq y$，则下面的等式成立：

$$\frac{\partial^2}{\partial n_y \partial n_x} \ln|x-y| = -\frac{\partial^2}{\partial s_y \partial s_x} \ln|x-y|,\ x \neq y, \tag{7.1.17}$$

其中，$n_x=(n_x^1,\ n_x^2)^{\mathrm{T}}$，$n_y=(n_y^1,\ n_y^2)^{\mathrm{T}}$ 是两个单位向量，$s_x=(-n_x^2,\ n_x^1)^{\mathrm{T}}$，$s_y = (-n_y^2,\ n_y^1)^{\mathrm{T}}$ 分别垂直于 n_x 和 n_y。

证明

设：

$$x = (x_1,\ x_2)^{\mathrm{T}},\ y = (y_1,\ y_2)^{\mathrm{T}},\ r = |x-y|,$$

$$H = \ln|x-y| = \frac{1}{2}\ln\{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2\}.$$

经过简单的计算可得：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_1} &= \frac{(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2}{r^4}, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial x_1} &= \frac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_2} = \frac{2(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{r^4}, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial x_2} &= -\frac{(x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2}{r^4} = -\frac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_1}.
\end{aligned}$$

由此可得：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial n_y \partial n_x} = (n_y^1, n_y^2) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x^1 \\ n_x^2 \end{pmatrix}$$

$$
= -(-n_y^2, n_y^1) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial y_2 \partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n_x^2 \\ n_x^1 \end{pmatrix}
$$

$$
= -\frac{\partial^2 H}{\partial s_y \partial s_x}.
$$

引理获证。 ■

现在来考虑双层位势 $v_{II}(x)$ 的微商，对 $z \in \Omega_A$(或 $z \in \Omega_e$) 及单位向量 $n_z = (n_z^1,\ n_z^2)^{\mathrm{T}}$，则有：

$$
\frac{\partial v_{II}(z)}{\partial n_z} = \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial n_z \partial n_y} \ln|z - y| \mathrm{d}s_y
$$

将等式 (7.1.17) 代入上式右端可得：

$$
\frac{\partial v_{II}(z)}{\partial n_z} = -\int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial s_z \partial s_y} \ln|z - y| \mathrm{d}s_y,
$$

其中 $s_y = (-n_y^2,\ n_y^1)^{\mathrm{T}}$ 是 Γ_A 在点 y 上的单位切向量，$s_z = (-n_z^2,\ n_z^1)^{\mathrm{T}}$ 是垂直于 n_z 的单位向量。假设 $\rho(x)$ 在 Γ_A 上连续可微，在上式中进行分部积分并且记 $\dot{\rho}(x) = \dfrac{\mathrm{d}\rho(x)}{\mathrm{d}s_x}$，表示 $\rho(x)$ 沿曲线 Γ_A 对弧长的微商，可得：

$$
\frac{\partial v_{II}(z)}{\partial n_z} = \frac{\partial}{\partial s_z} \int_{\Gamma_A} \dot{\rho}(y) \ln|z - y| \mathrm{d}s_y
$$

因而双层位势在任意一点 $z \in \Omega_A$(或 $z \in \Omega_e$) 沿 n_z 的方向微商可表示为一个以 $\dot{\rho}(x)$ 为密度的单层位势的沿 s_z 的方向微商。

由单层位势在曲线 Γ_A 上的切向微商连续，可得双层位势 $v_{II}(x)$ 在 $x \in \Gamma_A$ 上的外法向微商的连续性，即：

引理 7.1.7 设 $\rho(x)$ 在 Γ_A 上有连续的微商，双层位势 $v_{II}(x)$ 在 $x \in \Gamma_A$ 上的外法向微商连续，并且，

$$
\frac{\partial v_{II}(x)}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial s_x} \int_{\Gamma_A} \dot{\rho}(y) \ln|x - y| \mathrm{d}s_y, \quad x \in \Gamma_A, \tag{7.1.18}
$$

其中 $\dot{\rho}(x)$ 表示 $\rho(x)$ 沿曲线 Γ_A 对弧长的微商。 ■

引理 7.1.8 关于单层位势 $v_I(x)$ 和双层位势 $v_{II}(x)$ 在无穷远处的性质有

下面的结果成立：

(i)
$$\lim_{|x|\to\infty} v_I(x) = \lim_{|x|\to\infty}\int_{\Gamma_A}\mu(y)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y = \begin{cases} 0, & \text{当} \displaystyle\int_{\Gamma_A}\mu(y)\mathrm{d}s_y = 0, \\ \infty, & \text{当} \displaystyle\int_{\Gamma_A}\mu(y)\mathrm{d}s_y \neq 0. \end{cases} \tag{7.1.19}$$

(ii)
$$\lim_{|x|\to\infty} v_{II}(x) = \lim_{|x|\to\infty}\int_{\Gamma_A}\rho(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y = 0. \tag{7.1.20}$$

证明

(i) 令：

$$\mu_0 = \frac{1}{\mathrm{meas}(\Gamma_A)}\int_{\Gamma_A}\mu(y)\mathrm{d}s_y,$$

则：

$$v_I(x)=\mu_0\int_{\Gamma_A}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y+\int_{\Gamma_A}(\mu(y)-\mu_0)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\equiv\mu_0 u_1(x)+u_2(x),$$

其中

$$u_1(x)=\int_{\Gamma_A}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y,\ u_2(x)=\int_{\Gamma_A}\mu^*(y)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y,\ \mu^*(x)=\mu(x)-\mu_0.$$

显然：

$$\lim_{|x|\to\infty}u_1(x)=\lim_{|x|\to\infty}\int_{\Gamma_A}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y=\infty,$$

$$u_2(x)=\int_{\Gamma_A}\mu^*(y)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y=\int_{\Gamma_A}\mu^*(y)(\ln|x-y|-\ln|x-y_0|)\mathrm{d}s_y,$$

其中 $y_0\in\Omega_A$ 是一个固定点。

由

$$\lim_{|x|\to\infty}\{\ln|x-y|-\ln|x-y_0|\}=\lim_{|x|\to\infty}\ln\frac{|x-y|}{|x-y_0|}=0,$$

对 $y\in\Gamma_A$ 一致地成立，可得 $\lim\limits_{|x|\to\infty}u_2(x)=0$。等式 (7.1.19) 获证。

(ii) 由于

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\right|=\left|\frac{(x_1-y_1)n_y^1+(x_2-y_2)n_y^2}{|x-y|^2}\right|\leqslant\frac{1}{|x-y|},$$

则 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|=0$ 对 $y\in\Gamma_A$ 一致地成立，(7.1.20) 获证。 ■

7.1.2 二维 Poisson 方程外问题的隐式人工边界条件的推导

回到二维 Poisson 方程外问题(7.1.1)~(7.1.3) 和任意形状的人工边界 Γ_A (见图 7-1)。问题 (7.1.1)~(7.1.3) 的解 $u(x)$ 在区域 Ω_e 上满足:

$$-\Delta u(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega_e, \tag{7.1.21}$$

$$\text{当}|x| \to \infty,\ u \text{ 有界}. \tag{7.1.22}$$

在区域 Ω_e 上应用 Green 公式，可得:

$$\begin{aligned} u(x) = &\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y + \alpha, \quad \forall\, x \in \Omega_e. \end{aligned} \tag{7.1.23}$$

其中，α 是一个常数，并且 $\alpha = \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)$。

由公式 (7.1.23) 可知在区域 Ω_e 上我们将问题 (7.1.1)~(7.1.3) 的解 $u(x)$ 表示为单层位势和双层位势的和。应用单层位势的连续性和双层位势在 Γ_A 上的间断性，对 $x \in \Gamma_A$ 可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(x) = &\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y + \alpha, \quad \forall\, x \in \Gamma_A. \end{aligned} \tag{7.1.24}$$

进一步由公式 (7.1.23) 应用单层位势法向微商的性质和双层位势在 Γ_A 上法向微商的连续性可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = &\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Gamma_A, \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

其中，

$$\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_x}\int_{\Gamma_A}\frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y, \ \forall\, x \in \Gamma_A. \tag{7.1.26}$$

在人工边界 Γ_A 上等式 (7.1.24) 和 (7.1.25) 给出了原问题 (7.1.1)~(7.1.3) 的解 $u(x)$ 满足的两个隐式人工边界条件。Johnson and Nedelec (1980) 应用其中的条件 (7.1.24) 将原问题 (7.1.1)~(7.1.3) 等价地简化为有界计算区域 Ω_i 上

的数值求解问题，在文献中他们的方法被称为有限元与边界元耦合的 Johnson-Nedelec 方法。下面我们同时应用两个隐式边界条件 (7.1.24) 和 (7.1.25)，将原问题 (7.1.1)~(7.1.3) 简化为有界区域 Ω_i 上的数值计算问题 (Han, 1990)。

设 $u(x)$ 是原问题 (7.1.1)~(7.1.3) 的解，令：

$$\lambda(x) = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A}，则 \int_{\Gamma_A} \lambda(x) \mathrm{d}s_x = 0, \tag{7.1.27}$$

可将隐式边界条件 (7.1.24) 和 (7.1.25) 改写为：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u(x) = & \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y + \alpha, \quad \forall\, x\in\Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.1.28}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A} = & \frac{1}{2}\lambda(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x\in\Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.1.29}$$

应用隐式边界条件 (7.1.28) 和 (7.1.29) 可将原问题 (7.1.1)~(7.1.3) 简化为有界区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \forall\, x\in\Omega_i, \tag{7.1.30}$$

$$u(x)|_{\Gamma} = 0, \tag{7.1.31}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A} = & \frac{1}{2}\lambda(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x\in\Gamma_A,\end{aligned} \tag{7.1.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u(x) = & \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y + \alpha, \quad \forall\, x\in\Gamma_A,\end{aligned} \tag{7.1.33}$$

其中函数 $u(x)$，$\lambda(x)$ 和常数 α 是未知的。

引进函数空间：

$$H_*^1(\Omega_i) = \{v \mid v\in H^1(\Omega_i)，并且 v|_{\Gamma} = 0\},$$

$$H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A) = \left\{\mu \mid \mu\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A)，并且 \int_{\Gamma_A}\mu(x)\mathrm{d}s_x = 0\right\},$$

$$V = H_*^1(\Omega_i)\times H_*^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_A).$$

对任意 $(v,\mu)\in V$，(v,μ) 的范数定义为：

$$||(v,\mu)||_V=\{||v||_{1,\Omega_i}^2+||\mu||_{-1/2,\Gamma_A}^2\}^{1/2}.$$

则有界区域 Ω_i 上的边值问题 (7.1.30)~(7.1.33) 等价于下面的变分问题 (Han, 1990)：

$$\begin{cases}\text{找 } (u,\lambda)\in V\text{，使}\\ a(u,v)+\dfrac{1}{2}<v,\lambda>+b\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s},\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)\\ \qquad -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x\\ \qquad =F(v),\quad \forall v\in H_*^1(\Omega_i), \qquad\qquad (7.1.34)\\ -\dfrac{1}{2}<u,\mu>+b(\lambda,\mu)+\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}u(y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x=0\\ \qquad \forall\mu\in H_*^{-1/2}(\Gamma_A), \qquad\qquad (7.1.35)\end{cases}$$

其中，

$$a(u,v)=\int_{\Omega_i}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x,\ \forall\ u,v\in H_*^1(\Omega_i),$$

$$<v,\lambda>=\int_{\Gamma_A}v(x)\lambda(x)\mathrm{d}s_x,\ v\in H_*^1(\Omega_i),\quad \forall\ \lambda\in H_*^{-1/2}(\Gamma_A),$$

$$b(\lambda,\mu)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\mu(x)\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x,\quad \forall\lambda,\mu\in H_*^{-1/2}(\Gamma_A),$$

$$F(v)=\int_{\Omega_i}f(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

令：

$$\begin{aligned}A(u,\lambda;\ v,\mu)=&\,a(u,v)+b\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)+b(\lambda,\mu)+\frac{1}{2}<v,\lambda>-\frac{1}{2}<u,\mu>\\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}u(y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x,\end{aligned}\tag{7.1.36}$$

则变分问题 (7.1.34), (7.1.35) 等价于：

$$\begin{cases}\text{找 } (u,\lambda)\in V\text{，使}\\ A(u,\lambda;\ v,\mu)=F(v),\quad \forall\ (v,\mu)\in V.\end{cases}\tag{7.1.37}$$

$A(u,\lambda;\ v,\mu)$ 是定义于 $V\times V$ 上的双线性形式。对于双线性形式 A 有下面的结果 (Han, 1990)：

引理 7.1.9　存在正数 $M>0,\ \beta>0$ 使

$$|A(u,\lambda;\ v,\mu)| \leqslant M\|(u,\lambda)\|_V\|(v,\mu)\|_V,\quad \forall\ (u,\lambda),(v,\mu)\in V, \tag{7.1.38}$$

$$A(v,\mu;\ v,\mu) \geqslant \beta\|(v,\mu)\|_V^2,\quad \forall\ (v,\mu)\in V. \tag{7.1.39}$$

应用 Lax-Milgram 定理立即可得：

定理 7.1.1　对已知的 $f\in H^{-1}(\Omega_i)$，变分问题 (7.1.37) 存在唯一解 $(u,\lambda)\in V$，其中 $u(x)$ 是原问题 (7.1.1)~(7.1.3) 的解在有界区域 Ω_i 上的限制，并且 $\lambda(x)=\left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A}$。■

附注 7.1.1　边值问题 (7.1.30)~(7.1.33) 与变分问题 (7.1.34) 和 (7.1.35) 是等价的，但是在变分问题 (7.1.34) 和 (7.1.35) 中未知常数 α 已经消失了。

附注 7.1.2　变分问题 (7.1.37) 中的双线性形式 $A(u,\lambda;\ v,\mu)$ 不是对称的 (它是斜对称的)，但是它满足强制性条件 (7.1.39)。强制性条件 (7.1.39) 十分重要，它保证了变分问题 (7.1.37) 的存在唯一性，它也是后面数值解误差分析的基础。

附注 7.1.3　令：

$$\begin{aligned}A^*(u,\lambda;\ v,\mu)=&a(u,v)+b\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)-b(\lambda,\mu)+\frac{1}{2}<v,\lambda>+\frac{1}{2}<u,\mu>\\&-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x\\&-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}u(y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\ln|x-y|\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x.\end{aligned}\tag{7.1.40}$$

在变分等式 (7.1.35) 两边同乘以 -1，应用双线性形式 $A^*(u,\lambda;\ v,\mu)$，可将变分问题 (7.1.37) 改写为下面的等价形式：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{找 } (u,\lambda)\in V,\text{ 使}\\ A^*(u,\lambda;\ v,\mu)=F(v),\quad\forall\ (v,\mu)\in V.\end{array}\right.\tag{7.1.41}$$

其中双线性形式 $A^*(u,\lambda;\ v,\mu)$ 是对称的，但是它不满足强制性条件。变分问题 (7.1.41) 是 Costabel (1987) 给出的。变分问题 (7.1.37) 和变分问题 (7.1.41) 是完全等价的。

7.1.3　变分问题 (7.1.37) 的有限元近似解和误差估计

假设 H_{h_1} 和 B_{h_2} 分别为 $H_*^1(\Omega_i)$ 和 $H_*^{-1/2}(\Gamma_A)$ 的有限元子空间，并满足性质：

$$\inf_{v_h \in H_{h_1}} ||v - v_h||_{1,\Omega_i} \leqslant C h_1^{\gamma_1} |v|_{\gamma_1+1,\Omega_i}, \quad \forall\, v \in H_*^1(\Omega_i) \cap H^{\gamma_1+1}(\Omega_i), \tag{7.1.42}$$

$$\inf_{\mu_h \in B_{h_2}} ||\mu - \mu_h||_{-1/2,\Gamma_A} \leqslant C h_2^{\gamma_2} |\mu|_{\gamma_2-1/2,\Gamma_A}, \quad \forall\, \mu \in H_*^{-1/2}(\Gamma_A) \cap H^{\gamma_2-1/2}(\Gamma_A), \tag{7.1.43}$$

其中 γ_1, γ_2 为正数。有限元子空间 H_{h_1} 和 B_{h_2} 的具体构造可参阅 Han (1990)。令：

$$V_h = H_{h_1} \times B_{h_2}. \tag{7.1.44}$$

我们得到空间 V 的一个有限元子空间 V_h，在变分问题 (7.1.37) 中用 V_h 代替空间 V，得到变分问题 (7.1.37) 的有限元近似：

$$\begin{cases} \text{找 } (u_h, \lambda_h) \in V_h, \text{ 使} \\ A(u_h, \lambda_h;\ v_h, \mu_h) = F(v_h), \quad \forall\, (v_h, \mu_h) \in V_h. \end{cases} \tag{7.1.45}$$

下面的结果成立 (Han, 1990)：

定理 7.1.2

(i) 离散变分问题 (7.1.45) 存在唯一解 $(u_h, \lambda_h) \in V_h$。

(ii) 假设连续变分问题 (7.1.37) 的解 $(u(x), \lambda(x))$ 满足：

$$u(x) \in H_*^1(\Omega_i) \cap H^{\gamma_1+1}(\Omega_i), \ \lambda(x) \in H_*^{-1/2}(\Gamma_A) \cap H^{\gamma_2-1/2}(\Gamma_A),$$

则下面的误差估计成立

$$||(u - u_h,\ \lambda - \lambda_h)||_V \leqslant C\{h_1^{\gamma_1} |u|_{\gamma_1+1,\Omega_i} + h_2^{\gamma_2} |\lambda|_{\gamma_2-1/2,\Gamma_A}\}, \tag{7.1.46}$$

其中 $C > 0$ 是一个常数，不依赖于有限元子空间 V_h。 ■

7.2 三维 Poisson 方程外问题的隐式人工边界条件

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是以 Γ 为边界的外区域，其中 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ 是一光滑的简单闭曲面。考虑三维 Poisson 方程外问题：

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{7.2.1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{7.2.2}$$

$$\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时}, \ u \to 0. \tag{7.2.3}$$

引入任意形状的人工边界 Γ_A，$\Gamma_A \subset \Omega$ 是一光滑的简单闭曲面。Γ_A 将外区域 Ω 分割为有界区域 Ω_i 和无界区域 Ω_e，并且假设在 Ω_e 上 $f(x) \equiv 0$。在这一节中我们在人工边界 Γ_A 上推导三维 Poisson 方程外问题的人工边界条件。三维 Laplace 方程的基本解为 (Chen & Zhou，1992)：

$$E(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}, \tag{7.2.4}$$

它满足方程：

$$-\Delta_y E(x,y) = \delta(x-y). \tag{7.2.5}$$

对于曲面 Γ_A 上的已知函数 $\mu(x)$，$\rho(x)$，令：

$$v_I(x) = \int_{\Gamma_A} \mu(y)\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \tag{7.2.6}$$

$$v_{II}(x) = \int_{\Gamma_A} \rho(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \tag{7.2.7}$$

其中 $n_x = (n_x^1, n_x^2, n_x^3)^{\mathrm{T}}$ 是曲面 Γ_A 在点 $x \in \Gamma_A$ 上区域 Ω_e 的单位外法向向量。称 $v_I(x)$ 和 $v_{II}(x)$ 为三维 Laplace 方程的单层位势和双层位势。类似于二维的情况，我们有 (Chen & Zhou, 1992)：

引理 7.2.1　设密度函数 $\mu(x)$，$\rho(x)$ 在 Γ_A 上连续，则：

(i) 单层位势 $v_I(x)$ (7.2.6) 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续，并且除去曲面 Γ_A 外 $v_I(x)$ 是调和函数即 $\Delta v_I(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_A$。

(ii) 双层位势 $v_{II}(x)$ 在 $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_A$ 上连续并且是调和函数，在 Γ_A 上有如下第一类间断：

$$\lim_{x'\to x, x'\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}_e} v_{II}(x') = 2\pi\rho(x) + v_{II}(x), \quad \forall\, x \in \Gamma_A, \tag{7.2.8}$$

$$\lim_{x'\to x, x'\in\Omega_e} v_{II}(x') = -2\pi\rho(x) + v_{II}(x), \quad \forall\, x \in \Gamma_A \tag{7.2.9}$$

(iii) 单层位势 $v_I(x)$ 在 Γ_A 上的法向微商有第一类间断：

$$\frac{\partial v_I(x)}{\partial n_x^-} = -2\pi\mu(x) + \int_{\Gamma_A} \mu(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Gamma_A, \tag{7.2.10}$$

$$\frac{\partial v_I(x)}{\partial n_x^+} = 2\pi\mu(x) + \int_{\Gamma_A} \mu(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Gamma_A \tag{7.2.11}$$

(iv) 单层位势 $v_I(x)$ 在 Γ_A 上的切向微商连续。

对于单位向量 $n_x = (n_x^1, n_x^2, n_x^3)^{\mathrm{T}}$，令：

$$
\begin{aligned}
s_{1,x} &= (0, -n_x^3, n_x^2)^{\mathrm{T}}, \\
s_{2,x} &= (n_x^3, 0, -n_x^1)^{\mathrm{T}}, \\
s_{3,x} &= (-n_x^2, n_x^1, 0)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

则向量 $s_{1,x}$，$s_{2,x}$ 和 $s_{3,x}$ 垂直于 n_x，但一般情况下，$s_{1,x}$，$s_{2,x}$ 和 $s_{3,x}$ 不是单位向量。如果 n_x 是曲面 Γ_A 在点 x 的单位外法向向量，则 $s_{1,x}$，$s_{2,x}$ 和 $s_{3,x}$ 是曲面 Γ_A 的三个切向量。为了研究双层位势的微商，首先证明下面的引理 (Han, 1994-A, 1994-B)。

引理 7.2.2　当 $x \neq y$ 时，下面的等式成立：

$$
\frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial s_{k,x} \partial s_{k,y}}\left(\frac{1}{|x-y|}\right).
$$

证明　令：

$$
H(x,y) = \frac{1}{|x-y|}.
$$

一个直接计算可得：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 H}{\partial s_{k,x}\partial s_{k,y}} = &\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_3}\right) n_x^1 n_y^1 + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_3}\right) n_x^2 n_y^2 \\
&+ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_2}\right) n_x^3 n_y^3 \\
&- \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_1} n_x^1 n_y^2 - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_2} n_x^2 n_y^1 - \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_3} n_x^3 n_y^1 \\
&- \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_1} n_x^1 n_y^3 - \frac{\partial^2 H}{\partial x_3 \partial y_2} n_x^2 n_y^3 - \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_3} n_x^3 n_y^2.
\end{aligned}
$$

应用等式

$$
\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_i} = 0,
$$

和等式

$$
\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial y_i}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 3,
$$

可得：

$$
\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 H}{\partial s_{k,x}\partial s_{k,y}} = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_j} n_x^i n_y^j = -\frac{\partial^2 H}{\partial n_x \partial n_y}.
$$

引理获证。　■

任取 $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_A$，和单位向量 $n_x = (n_x^1, n_x^2, n_x^3)^{\mathrm{T}}$，在 x_0 双层位势 $v_{II}(x)$ 沿 n_x 的方向导数存在，而且

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_{II}(x_0)}{\partial n_x} &= \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \mathrm{d}s_y \\
&= -\sum_{k=1}^{3} \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial^2}{\partial s_{k,x} \partial s_{k,y}} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \mathrm{d}s_y \\
&= -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial s_{k,x}} \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial}{\partial s_{k,y}} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \mathrm{d}s_y \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial s_{k,x}} \int_{\Gamma_A} \frac{\partial \rho(y)}{\partial s_{k,y}} \left(\frac{1}{|x_0 - y|} \right) \mathrm{d}s_y.
\end{aligned}
$$

这样我们将双层位势在点 x_0 的方向导数表示为三个单层位势的方向导数之和。令 $x_0 \to x \in \Gamma_A$，并取 n_x 为 $x \in \Gamma_A$ 对区域 Ω_e 的单位外法向向量，由单层位势 $v_I(x)$ 在边界曲面 Γ_A 上沿切线方向微商的连续性可得：

$$
\frac{\partial v_{II}(x)}{\partial n_x} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial s_{k,x}} \int_{\Gamma_A} \frac{\partial \rho(y)}{\partial s_{k,y}} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \mathrm{d}s_y, \tag{7.2.12}
$$

即有：

引理 7.2.3　设密度函数 $\rho(x)$ 在 Γ_A 上存在一阶连续微商，则双层位势 $v_{II}(x)$ 在曲面 Γ_A 上外法向微商连续，并由 (7.2.12) 给出。■

引理 7.2.4　当 $|x| \to \infty$ 时，单层位势 $v_I(x)$ 和双层位势 $v_{II}(x)$ 趋于零，即：

$$
v_I(x) = \int_{\Gamma_A} \mu(y) \frac{1}{|x - y|} \mathrm{d}s_y \to 0, \text{ 当 } |x| \to \infty \text{ 时}, \tag{7.2.13}
$$

$$
v_{II}(x) = \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \mathrm{d}s_y \to 0, \text{ 当 } |x| \to \infty \text{ 时}. \tag{7.2.14}
$$

■

回到问题 (7.2.1)~(7.2.3)，其解 $u(x)$ 在无界区域 Ω_e 上的限制，满足：

$$
-\Delta u(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega_e \tag{7.2.15}
$$

$$
\text{当 } |x| \to \infty \text{ 时}, \ u(x) \to 0. \tag{7.2.16}
$$

在 Ω_e 上应用 Green 公式，可得：

$$
\begin{aligned}
u(x) = &-\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_A} u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \mathrm{d}s_y \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \left(\frac{1}{|x - y|} \right) \mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Omega_e,
\end{aligned} \tag{7.2.17}
$$

即将原问题的解 $u(x)$ 在区域 Ω_e 上表示为双层位势和单层位势之和。应用单层位势和双层位势的性质，在人工边界 Γ_A 上得到：

$$\frac{1}{2}u(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A. \tag{7.2.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\bigg|_{\Gamma_A}=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.2.19}$$

其中，

$$\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial s_{k,x}}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial s_{k,y}}\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A. \tag{7.2.20}$$

等式 (7.2.18) 和 (7.2.19) 是原问题 (7.2.1)~(7.2.3) 的解 $u(x)$ 在人工边界 Γ_A 上满足的隐式人工边界条件。

令：

$$\lambda(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\bigg|_{\Gamma_A}, \tag{7.2.21}$$

可将隐式边界条件 (7.2.18) 和 (7.2.19) 改写为：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u(x)=&-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.2.22}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\bigg|_{\Gamma_A}=&\frac{1}{2}\lambda(x)-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.2.23}$$

应用隐式人工边界条件 (7.2.22) 和 (7.2.23) 可将原问题 (7.2.1)~(7.2.3) 等价地简化为有界计算区域 Ω_i 上的边值问题：

$$-\Delta u(x)=f(x),\quad \forall\, x\in\Omega_i, \tag{7.2.24}$$

$$u|_{\Gamma}=0, \tag{7.2.25}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}u(x) = & -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y \\
& +\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x\in\Gamma_A.
\end{aligned} \tag{7.2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A} = & \frac{1}{2}\lambda(x) - \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y \\
& +\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y. \quad \forall\, x\in\Gamma_A.
\end{aligned} \tag{7.2.27}
$$

令：

$$
H_*^1(\Omega_i) = \{v \mid v\in H^1(\Omega_i),\ v|_\Gamma = 0\}, \quad V = H_*^1(\Omega_i)\times H^{-1/2}(\Gamma_A).
$$

对 $(v,\mu)\in V$，(v,μ) 的范数定义为：

$$
||(v,\mu)||_V = \{||v||_{1,\Omega_i}^2 + ||\mu||_{-1/2,\Gamma_A}^2\}^{1/2},
$$

则边值问题 (7.2.24)~(7.2.27) 等价于下面的变分问题：

$$
\begin{cases}
\text{找 } (u,\lambda)\in V\text{，使} \\
a(u,v)+\dfrac{1}{2}< v,\lambda > +b_0(u,v)+\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x} \\
\quad\cdot\left(\dfrac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x = F(v), \qquad \forall\, v\in H_*^1(\Omega_i), \qquad (7.2.28) \\
-\dfrac{1}{2}< u,\mu > +b_1(\lambda,\mu)-\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}u(y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y} \\
\quad\cdot\left(\dfrac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x, \qquad \forall\, \mu\in H^{-1/2}(\Gamma_A), \qquad (7.2.29)
\end{cases}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_{\Omega_i}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x, \\
b_0(u,v) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}u(y)v(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x \\
&= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{3}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial s_{k,y}}\frac{\partial v(x)}{\partial s_{k,x}}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x, \\
b_1(\lambda,\mu) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\mu(x)\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x, \\
F(v) &= \int_{\Omega_i}fv\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

令：

$$\begin{aligned}A(u,\lambda;v,\mu)=&\,a(u,v)+b_0(u,v)+b_1(\lambda,\mu)+\frac{1}{2}<v,\lambda>-\frac{1}{2}<u,\mu>\\&+\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x\\&-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}u(y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x,\end{aligned}\tag{7.2.30}$$

$$\begin{aligned}A^*(u,\lambda;v,\mu)=&\,a(u,v)+b_0(u,v)-b_1(\lambda,\mu)+\frac{1}{2}<v,\lambda>+\frac{1}{2}<u,\mu>\\&-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}\lambda(y)v(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x\\&-\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_A}u(y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\mathrm{d}s_y\mathrm{d}s_x,\end{aligned}\tag{7.2.31}$$

可将变分问题 (7.2.28)~(7.2.29) 改写为下面两个等价的变分形式：

$$\begin{cases}\text{找 } (u,\lambda)\in V\text{，使}\\ A(u,\lambda;v,\mu)=F(v),\quad\forall\ (v,\mu)\in V,\end{cases}\tag{7.2.32}$$

$$\begin{cases}\text{找 } (u,\lambda)\in V\text{，使}\\ A^*(u,\lambda;v,\mu)=F(v),\quad\forall\ (v,\mu)\in V.\end{cases}\tag{7.2.33}$$

类似于二维的情况，可以证明 $A(u,\lambda;v,\mu)$ 和 $A^*(u,\lambda;v,\mu)$ 是定义于 $V\times V$ 上的有界双线性形式，$A^*(u,\lambda;v,\mu)$ 是对称的，$A(u,\lambda;v,\mu)$ 是不对称的，但满足强制性条件，即存在 $\alpha>0$ 使

$$A(v,\mu;v,\mu)\geqslant\alpha||(v,\mu)||_V^2,\quad\forall\ (v,\mu)\in V.\tag{7.2.34}$$

应用 Lax-Milgram 定理直接可得变分问题 (7.2.32) 解的存在唯一性。完全类似于二维情形 (7.1.3 节) 应用有限元方法可将变分问题离散化，可得原问题 (7.2.1)~(7.2.3) 的解 $u(x)$ 在有界计算区域 Ω_i 上的数值近似解和误差估计。

7.3　Helmholtz 方程外问题的隐式人工边界条件

在 1.5 节中我们讨论了 Helmholtz 方程外问题的整体人工边界条件。在二维情况下选取人工边界为圆周，在三维情况下选取人工边界为球面，我们得到了 Helmholtz 方程外问题的整体人工边界条件和一系列高精度近似人工边界条件并且保证在有界计算区域上简化问题的适定性。在这一节我们再研究 Helmholtz 方程外问题，在任意形状的人工边界 Γ_A 上构造隐式人工边界条件。

考虑 Helmholtz 方程外问题：

$$-\Delta u - k^2 u = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{7.3.1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{7.3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku = 0\Big(\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\Big), \quad 当\ r = |x| \to \infty, \tag{7.3.3}$$

其中 $n = 2, 3$，$\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是以 Γ 为边界的外区域，k 为正实数。$f(x)$ 为 Ω 上已知函数具有紧支集。

以 $E_n(x, y; k)$ 表示 Helmholtz 方程在 $\mathbb{R}^n$ 上的基本解，即 $E_n(x, y; k)$ 满足：

$$-\Delta_y E_n(x, y; k) - k^2 E_n(x, y; k) = \delta(x - y). \tag{7.3.4}$$

并且 (Chen and Zhou, 1992)，

$$E_2(x, y; k) = \frac{\mathrm{i}}{4} H_0^1(k|x - y|), \tag{7.3.5}$$

$$E_3(x, y; k) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x - y|}. \tag{7.3.6}$$

引进任意形状的人工边界 $\Gamma_A \subset \mathbb{R}^n$($n = 2$ 时 Γ_A 为一条光滑的简单闭曲线，$n = 3$ 时 Γ_A 为一光滑简单闭曲面)，Γ_A 将外区域 Ω 分割为有界部分 Ω_i 和无界部分 Ω_e 并且使 $f(x) \equiv 0$, $\forall\, x \in \Omega_e$。

对 Γ_A 上已知密度函数 $\mu(x)$，$\rho(x)$，考虑 Helmholtz 方程的单层位势和双层位势：

$$v_I(x) = \int_{\Gamma_A} \mu(y) E_n(x, y; k) \mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3.7}$$

$$v_{II}(x) = \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x, y; k) \mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.3.8}$$

由于 Helmholtz 方程的基本解 $E_n(x, y; k)$ 与 Laplace 方程的基本解具有相同的奇性，即：

$$\lim_{y \to x} \frac{E_2(x, y; k)}{-\frac{1}{2\pi} \ln|x - y|} = 1,$$

$$\lim_{y \to x} \frac{E_3(x, y; k)}{\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}} = 1.$$

因而 Helmholtz 方程的单层位势与双层位势在 Γ_A 上的性质 (连续性、间断性、可微性) 与 Laplace 方程的单层位势和双层位势是一样的。但是 Helmholtz 方程单层位势和双层位势在无穷远的性质，双层位势 $v_{II}(x)$ 在 Γ_A 上法向微商的表示式与 Laplace 方程的单层位势和双层位势是不同的。

7.3.1 Helmholtz 方程双层位势在 Γ_A 上的法向微商

首先我们注意到 Helmholtz 方程的基本解具有下面性质：

引理 7.3.1 对 $x \neq y$，下面的等式成立：

(i) $n=2$ 的情况

$$\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial n_x \partial n_y} = -\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial s_x \partial s_y} + k^2 E_2(x,y;k)\cos(n_x,n_y), \tag{7.3.9}$$

其中，$n_x=(n_x^1,n_x^2)^{\mathrm{T}}$，$n_y=(n_y^1,n_y^2)^{\mathrm{T}}$ 是两个单位向量，$s_x=(-n_x^2,n_x^1)^{\mathrm{T}}$，$s_y=(-n_y^2,n_y^1)^{\mathrm{T}}$ 分别垂直于 n_x，n_y。

(ii) $n=3$ 的情况

$$\frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial n_x \partial n_y} = -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial s_{j,x} \partial s_{j,y}} + k^2 E_3(x,y;k)\cos(n_x,n_y), \tag{7.3.10}$$

其中，$n_x=(n_x^1,n_x^2,n_x^3)^{\mathrm{T}}$，$n_y=(n_y^1,n_y^2,n_y^3)^{\mathrm{T}}$ 是两个单位向量，$s_{1,x}=(0,-n_x^3,n_x^2)^{\mathrm{T}}$，$s_{2,x}=(n_x^3,0,-n_x^1)^{\mathrm{T}}$，$s_{3,x}=(-n_x^2,n_x^1,0)^{\mathrm{T}}$，$s_{1,y}=(0,-n_y^3,n_y^2)^{\mathrm{T}}$，$s_{2,y}=(n_y^3,0,-n_y^1)^{\mathrm{T}}$，$s_{3,y}=(-n_y^2,n_y^1,0)^{\mathrm{T}}$。$s_{j,x}(j=1,2,3)$ 垂直于 n_x，$s_{j,y}(j=1,2,3)$ 垂直于 n_y。

证明

(i) 直接计算可得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial s_x \partial s_y} =& n_x^2 n_y^2 \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_1 \partial y_1} - n_x^1 n_y^2 \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_2 \partial y_1} \\ &- n_x^2 n_y^1 \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_1 \partial y_2} + n_x^1 n_y^1 \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_2 \partial y_2}.\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

由基本解的性质可得：

$$\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_j \partial y_i}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 2, \tag{7.3.12}$$

$$\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_i \partial y_i} = -\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_i^2}, \tag{7.3.13}$$

$$\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_2 \partial y_2} - k^2 E_2(x,y,k) = 0, \quad x \neq y. \tag{7.3.14}$$

将 (7.3.12)~(7.3.14) 代入 (7.3.11) 可得：

$$\frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial s_x \partial s_y} = -\sum_{i,j=1}^{2} n_x^i n_y^j \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial x_i \partial y_j} + k^2(n_x^1 n_y^1 + n_x^2 n_y^2) E_2(x,y;k),$$

即等式 (7.3.9) 成立。

(ii) $n=3$ 的情形：

其证明与引理 7.2.2 的证明类似，不再叙述。只需注意到此时基本解 $E_3(x,y;k)$ 满足：

$$\frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial x_j \partial y_i}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 3,$$
$$\frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial x_i \partial y_i} = -\frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial x_i^2},$$
$$\frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial x_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial x_3 \partial y_3} - k^2 E_3(x,y,k) = 0, \quad x \neq y.$$

■

应用引理 7.3.1 的结果可得 Helmholtz 方程双层位势 $v_{II}(x)$ 在 Γ_A 上法向微商的表达式：

引理 7.3.2　假设 $\rho(x)$ 在 Γ_A 上连续可微，则双层位势 $v_{II}(x)$ 在 Γ_A 上法向微商连续，并且

(i) $n=2$ 时

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial v_{II}(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A} &\equiv \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial^2 E_2(x,y;k)}{\partial n_x \partial n_y} \mathrm{d}s_y \\ &= \frac{\partial}{\partial s_x} \int_{\Gamma_A} \dot{\rho}(y) E_2(x,y;k) \mathrm{d}s_y \\ &\quad + k^2 \int_{\Gamma_A} \rho(y) E_2(x,y;k) \cos(n_x, n_y) \mathrm{d}s_y, \quad \forall x \in \Gamma_A. \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

(ii) $n=3$ 时

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial v_{II}(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A} &\equiv \int_{\Gamma_A} \rho(y) \frac{\partial^2 E_3(x,y;k)}{\partial n_x \partial n_y} \mathrm{d}s_y \\ &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial s_{j,x}} \int_{\Gamma_A} \frac{\partial \rho(y)}{\partial s_{j,y}} E_3(x,y;k) \mathrm{d}s_y \\ &\quad + k^2 \int_{\Gamma_A} \rho(y) E_3(x,y;k) \cos(n_x, n_y) \mathrm{d}s_y. \end{aligned} \tag{7.3.16}$$

■

在引理 7.1.7，引理 7.2.3，引理 7.3.2 中，我们应用单层位势和单层位势的切线微商将双层位势的法向微商表示出来。这些结果十分有用，在实际数值计算中避免了高奇异积分的计算。

引理 7.3.3 (Chen and Zhou, 1992) 当 $r=|x|\to+\infty$ 时，Helmholtz 方程的单层位势 $v_I(x)$ 和双层位势 $v_{II}(x)$ 满足 Sommerfeld 辐射条件：

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}-\mathrm{i}k\right)v_I(x)=o\left(\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\right), \tag{7.3.17}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}-\mathrm{i}k\right)v_{II}(x)=o\left(\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\right). \tag{7.3.18}$$

对原问题 (7.3.1)~(7.3.3) 的解 $u(x)$ 在区域 Ω_e 上应用 Green 公式，可得：

$$u(x)=-\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial E_n(x,y;k)}{\partial n_y}\mathrm{d}s_y+\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}E_n(x,y;k)\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Omega_e. \tag{7.3.19}$$

即我们将 Helmholtz 方程外问题的解 $u(x)$ 在区域 Ω_e 上表示为双层位势和单层位势的和。应用双层位势、单层位势及其法向微商在人工边界 Γ_A 上的性质，我们得到：

$$\frac{1}{2}u(x)=-\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial E_n(x,y;k)}{\partial n_y}\mathrm{d}s_y+\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}E_n(x,y;k)\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A, \tag{7.3.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A}=&-\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial^2 E_n(x,y;k)}{\partial n_x\partial n_y}\mathrm{d}s_y\\&+\int_{\Gamma_A}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\frac{\partial E_n(x,y;k)}{\partial n_x}\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.3.21}$$

其中奇异积分

$$\int_{\Gamma_A}u(y)\frac{\partial^2 E_n(x,y;k)}{\partial n_x\partial n_y}\mathrm{d}s_y$$

由公式 (7.3.15) ($n=2$ 时) 或由公式 (7.3.16) ($n=3$ 时) 给出。等式 (7.3.20) 和 (7.3.21) 是 Helmholtz 外问题 (7.3.1)~(7.3.3) 的解 $u(x)$ 在任意形状人工边界 Γ_A 上满足的两个隐式人工边界条件.

令：

$$\lambda(x)=\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A}, \tag{7.3.22}$$

应用隐式边界条件 (7.3.20)~(7.3.21) 可将原问题 (7.3.1)~(7.3.3) 等价地简化为有界区域 Ω_i 上的边值问题：

$$\begin{cases} \text{找 } \{u(x), \lambda(x)\}\text{，满足：} \\ -\Delta u - k^2 u = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega_i, & (7.3.23) \\ u|_\Gamma = 0, & (7.3.24) \\ \dfrac{1}{2}u(x) = -\displaystyle\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial E_n(x,y;k)}{\partial n_y}\mathrm{d}s_y + \int_{\Gamma_A}\lambda(y)E_n(x,y;k)\mathrm{d}s_y, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, x \in \Gamma_A, & (7.3.25) \\ \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right|_{\Gamma_A} = \dfrac{1}{2}\lambda(x) - \displaystyle\int_{\Gamma_A} u(y)\frac{\partial^2 E_n(x,y;k)}{\partial n_x \partial n_y}\mathrm{d}s_y \\ \qquad + \displaystyle\int_{\Gamma_A}\lambda(y)\frac{\partial E_n(x,y;k)}{\partial n_x}\mathrm{d}s_y. \quad \forall\, x \in \Gamma_A. & (7.3.26) \end{cases}$$

在有界区域 Ω_i 上数值求解边值问题 (7.3.23)~(7.3.26)，可得到原问题 (7.3.1)~(7.3.3) 的解 $u(x)$ 的数值近似，从而克服了区域的无界性带来的困难。

7.4 Navier 方程组外问题的隐式人工边界条件

首先我们在 $\mathbb{R}^n(n=2,3)$ 上讨论 Navier 方程组：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}(x) - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}(x)) = 0, \tag{7.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{u}(x)$ 表示位移向量，$\lambda > 0$，$\mu > 0$ 为弹性材料的 Lamé常数。

7.4.1 基本解、应力算子、单层位势和双层位势

记

$$\boldsymbol{E}_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda+3\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\dfrac{1}{|x-y|}\boldsymbol{I}_3 \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\dfrac{1}{|x-y|^2}(x-y)(x-y)^{\mathrm{T}}\right], & n=3; \\ \dfrac{\lambda+3\mu}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\ln\dfrac{1}{|x-y|}\boldsymbol{I}_2 \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\dfrac{1}{|x-y|^2}(x-y)(x-y)^{\mathrm{T}}\right], & n=2. \end{cases} \tag{7.4.2}$$

称 $\boldsymbol{E}_n(x,y)$ 为 Navier 方程组 (7.4.1) 的基本解，并且，

$$-\mu\Delta_y\boldsymbol{E}_n(x,y) - (\lambda+\mu)\nabla_y(\nabla_y\cdot\boldsymbol{E}_n(x,y)) = \delta(x-y)\boldsymbol{I}_n, \quad \forall\, x,y \in R^n, \tag{7.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 $n\times n$ 单位矩阵 (Chen and Zhou, 1992)。

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和单位向量 $\boldsymbol{n}(x) = (n_x^1, \cdots, n_x^n)^{\mathrm{T}}$，定义下面矩阵微分算子(应力算子，Kupradze, 1979)：

$$\boldsymbol{T}(\partial_x, n_x) = (T_{ij}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x))_{n\times n}, \tag{7.4.4}$$

其中，

$$T_{ij}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) = \lambda n_x^i \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_x^j \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n_x}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{7.4.5}$$

将微分算子 $\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)$ 作用在位移向量 $\boldsymbol{u}(x)$ 上，得：

$$\boldsymbol{T}(\partial_x, n_x)\boldsymbol{u}(x) = (T_1(\boldsymbol{u}(x)), \cdots, T_n(\boldsymbol{u}(x)))^{\mathrm{T}},$$

其中，

$$T_i(\boldsymbol{u}(x)) = \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x))n_x^i + \mu\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i}\right)n_x^j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{7.4.6}$$

$\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{u}(x)$ 表示位移 $\boldsymbol{u}(x)$ 在点 $x \in \mathbb{R}^n$ 上对应的方向应力。

设 $\Gamma_A \subset \mathbb{R}^n$ 为一简单光滑闭曲面 $(n = 3)$ 或一条简单光滑闭曲线 $(n = 2)$，Γ_A 将 $\mathbb{R}^n$ 分割为有界区域 Ω_A 和无界区域 Ω_e，以 $\boldsymbol{n}_x = (n_x^1, \cdots, n_x^n)^{\mathrm{T}}$ 表示在点 $x \in \Gamma_A = \partial\Omega_e$ 上的单位外法向向量，对 Γ_A 上已知的连续向量值函数 $\boldsymbol{\omega}(x) = (\omega_1(x), \cdots, \omega_n(x))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\rho}(x) = (\rho_1(x), \cdots, \rho_n(x))^{\mathrm{T}}$，令：

$$\boldsymbol{v}_I(x) = \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{E}_n(x, y)\boldsymbol{\omega}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in R^n, \tag{7.4.7}$$

$$\boldsymbol{v}_{II}(x) = \int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(\partial_y, n_y)\boldsymbol{E}_n(x, y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in R^n, \tag{7.4.8}$$

称 $\boldsymbol{v}_I(x)$ 和 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 为 Navier 方程组 (7.4.1) 的单层位势和双层位势。假设向量值密度函数 $\boldsymbol{\omega}(x), \boldsymbol{\rho}(x)$ 在人工边界 Γ_A 上连续，则单层位势 $\boldsymbol{v}_I(x)$ 和双层位势 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 有下面的性质 (Chen and Zhou, 1992; Kupradze, 1979)：

引理 7.4.1 单层位势 $\boldsymbol{v}_I(x)$ 和双层位势 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在 Γ_A 外处处连续可微，并且满足 Navier 方程组。 ■

引理 7.4.2 单层位势 $\boldsymbol{v}_I(x)$ 在每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 一致收敛，在 R^n 上定义了一个连续向量值函数。 ■

引理 7.4.3 双层位势 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在空间 $\mathbb{R}^n$ 上有定义，但在 Γ_A 上有如下第一类间断，即对任意 $x \in \Gamma_A$，我们有

$$\lim_{x'\to x, x'\in\Omega_A} \boldsymbol{v}_{II}(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}(x) + \int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(y, n_y)\boldsymbol{E}_n(x, y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y, \tag{7.4.9}$$

$$\lim_{x'\to x, x'\in\Omega_e} \boldsymbol{v}_{II}(x) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}(x) + \int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_n(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y. \tag{7.4.10}$$

■

引理 7.4.4　$\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_I(x)$ 在 Γ_A 上有如下第一类间断：对于 $x\in\Gamma_A$，

$$\lim_{x'\to x, x'\in\Omega_A} \boldsymbol{T}(\partial_{x'},\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_I(x) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(x) + \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_n(x,y)\boldsymbol{\omega}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall x\in\Gamma_A, \tag{7.4.11}$$

$$\lim_{x'\to x, x'\in\Omega_e} \boldsymbol{T}(\partial_{x'},\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_I(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(x) + \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_n(x,y)\boldsymbol{\omega}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall x\in\Gamma_A. \tag{7.4.12}$$

■

进一步假设向量值密度函数 $\boldsymbol{\rho}(x)$ 在人工边界 Γ_A 上有连续的微商，则：

引理 7.4.5　$\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在 Γ_A 上连续，并且

$$\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x) = \mathrm{P.V.}\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)(\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_n(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall x\in\Gamma_A. \tag{7.4.13}$$

■

上式右端积分是带超奇性核的积分，P.V. 的意思是取主值。为了实际计算的便捷，下面分别在 $n=2$ 和 $n=3$ 的情况给出公式 (7.4.13) 的新表达式 (Han, 1993; Han, 1994-A)。

7.4.2　$\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在 Γ_A 上的新表达式 $(n=2)$

首先讨论 $n=2$ 的情况。对简单光滑闭曲线 Γ_A，对 $x\in\Gamma_A=\partial\Omega_e$ 的单位外法向向量 $\boldsymbol{n}_x=(n_x^1,n_x^2)^{\mathrm{T}}$，令 $\boldsymbol{s}_x=(-n_x^2,n_x^1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{s}_x$ 是单位向量，而且垂直于 $\boldsymbol{n}_x$。

引理 7.4.6　对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^2$ 并且 $x\neq y$，则下面的等式成立：

$$\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)(\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_2(x,y))^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}_x}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}_y}\boldsymbol{D}(x,y), \tag{7.4.14}$$

其中，$\boldsymbol{s}_x=(-n_x^2,n_x^1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{s}_y=(-n_y^2,n_y^1)^{\mathrm{T}}$ 分别垂直于单位向量 $\boldsymbol{n}_x=(n_x^1,n_x^2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{n}_y=(n_y^1,n_y^2)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{D}(x,y)=(D_{ij}(x,y))_{2\times 2}$ 是一个 2×2 的矩阵函数，其中，

$$D_{ij}(x,y) = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\left\{\delta_{ij}\ln\frac{1}{|x-y|} + \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^2}\right\}.$$

证明

记：

$$\boldsymbol{E}_2(x,y) = (\boldsymbol{E}^{(1)}(x,y),\boldsymbol{E}^{(2)}(x,y)) = (E_{ij}(x,y))_{2\times 2},$$

直接计算可得：

$$\mathrm{div}_x \boldsymbol{E}^{(i)} = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{1}{|x-y|}, \quad i=1,2, \tag{7.4.15}$$

$$\mathrm{div}_y \boldsymbol{E}^{(i)} = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial y_i} \ln \frac{1}{|x-y|}, \quad i=1,2, \tag{7.4.16}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}_2(x,y)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \boldsymbol{E}_2(x,y)}{\partial y_i}, \quad i=1,2. \tag{7.4.17}$$

令：

$$(\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_2(x,y))^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B} = (B_{ij})_{2\times 2},$$

则可得到：

$$\begin{aligned}
B_{11} =& T_{11}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)E_{11}(x,y) + T_{12}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)E_{21}(x,y),\\
=& \left\{\lambda \mathrm{div}_y \boldsymbol{E}^{(1)}(x,y) + 2\mu \frac{\partial E_{11}(x,y)}{\partial y_1}\right\} n_y^1\\
&+\mu\left\{\frac{\partial E_{11}(x,y)}{\partial y_2} + \frac{\partial E_{21}(x,y)}{\partial y_1}\right\} n_y^2\\
\equiv& \sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})n_y^1 + \sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})n_y^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{12} =& T_{21}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)E_{11}(x,y) + T_{22}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)E_{21}(x,y),\\
=& \mu\left\{\frac{\partial E_{11}(x,y)}{\partial y_2} + \frac{\partial E_{21}(x,y)}{\partial y_1}\right\} n_y^1\\
&+\left\{\lambda \mathrm{div}_y \boldsymbol{E}^{(1)}(x,y) + 2\mu \frac{\partial E_{21}(x,y)}{\partial y_2}\right\} n_y^2\\
\equiv& \sigma_{21}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})n_y^1 + \sigma_{22}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})n_y^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{21} =& T_{11}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)E_{12}(x,y) + T_{12}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)E_{22}(x,y),\\
=& \left\{\lambda \mathrm{div}_y \boldsymbol{E}^{(2)}(x,y) + 2\mu \frac{\partial E_{12}(x,y)}{\partial y_1}\right\} n_y^1\\
&+\mu\left\{\frac{\partial E_{12}(x,y)}{\partial y_2} + \frac{\partial E_{22}(x,y)}{\partial y_1}\right\} n_y^2\\
\equiv& \sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})n_y^1 + \sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})n_y^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_{22}=&T_{21}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)E_{12}(x,y)+T_{22}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)E_{21}(x,y),\\
=&\mu\left\{\frac{\partial E_{12}(x,y)}{\partial y_2}+\frac{\partial E_{22}(x,y)}{\partial y_1}\right\}n_y^1\\
&+\left\{\lambda\mathrm{div}_y\boldsymbol{E}^{(2)}(x,y)+2\mu\frac{\partial E_{22}(x,y)}{\partial y_2}\right\}n_y^2\\
\equiv&\sigma_{21}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})n_y^1+\sigma_{22}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})n_y^2.
\end{aligned}
$$

因而，

$$
B_{ij}=\sum_{l=1}^{2}\sigma_{jl}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(i)})n_y^l,\quad 1\leqslant i,j\leqslant 2. \tag{7.4.18}
$$

进一步令：

$$
\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)(\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_2(x,y))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{2\times 2}, \tag{7.4.19}
$$

则：

$$
\begin{aligned}
A_{ij}=&\sum_{k=1}^{2}T_{i,k}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)B_{kj}=\sum_{k=1}^{2}\left\{\lambda\frac{\partial B_{kj}}{\partial x_k}n_x^i+\mu\frac{\partial B_{kj}}{\partial x_i}n_x^k\right.\\
&\left.+\mu\delta_{ik}\left(\frac{\partial B_{kj}}{\partial x_1}n_x^1+\frac{\partial B_{kj}}{\partial x_2}n_x^2\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{7.4.20}
$$

当 $i=j=1$ 时我们有：

$$
A_{11}=\left[\lambda\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial B_{21}}{\partial x_2}\right)+2\mu\frac{\partial B_{11}}{\partial x_1}\right]n_x^1+\mu\left(\frac{\partial B_{11}}{\partial x_2}+\frac{\partial B_{21}}{\partial x_1}\right)n_x^2.
$$

将 (7.4.18) 代入上式可得：

$$
A_{11}=\sum_{k,l=1}^{2}W_{11}^{kl}n_y^kn_x^l,
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
W_{11}^{11}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})+\lambda\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)}),\\
W_{11}^{12}&=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})+\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})\right],\\
W_{11}^{21}&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})+\lambda\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)}),\\
W_{11}^{22}&=\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)})+\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})\right].
\end{aligned}
$$

应用基本解 $\boldsymbol{E}_2(x,y)$ 的性质我们有:

$$W_{11}^{11} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{(\lambda+2\mu)\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)}) - \lambda\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})\right\},$$

$$W_{11}^{12} = \mu\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)}) - \sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})\right\},$$

$$W_{11}^{21} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(\lambda+2\mu)\sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)}) - \lambda\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})\right\},$$

$$W_{11}^{22} = -\mu\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)}) - \sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})\right\}.$$

将基本解 $\boldsymbol{E}_2(x,y)$ 的表达式 (7.4.2) 代入上式直接计算可得:

$$\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)}) - \lambda\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)})\\ =&\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\ln\frac{1}{|x-y|}+\frac{(x_1-y_1)^2}{|x-y|^2}\right),\\ &\mu(\sigma_{11}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(1)}) - \sigma_{12}^{(y)}(\boldsymbol{E}^{(2)}))\\ =&\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+2\mu)}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\ln\frac{1}{|x-y|}+\frac{(x_1-y_1)^2}{|x-y|^2}\right)\end{aligned}$$

由此我们得到:

$$W_{11}^{11} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\ln\frac{1}{|x-y|}+\frac{(x_1-y_1)^2}{|x-y|^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2}D_{11}(x,y),$$

$$W_{11}^{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}D_{11}(x,y),$$

$$W_{11}^{21} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}D_{11}(x,y),$$

$$W_{11}^{22} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1}D_{11}(x,y).$$

$$\begin{aligned}A_{11} =& \sum_{k,l=1}^{2} W_{11}^{kl}n_y^k n_x^l\\ =&-(-n_x^2, n_x^1)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}D_{11}(x,y) & \dfrac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_2}D_{11}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_1}D_{11}(x,y) & \dfrac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}D_{11}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-n_y^2\\ n_x^1\end{pmatrix}\\ =&-\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}_x\partial \boldsymbol{s}_y}D_{11}(x,y).\end{aligned} \tag{7.4.21}$$

通过类似的分析计算可得：

$$A_{12} = -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}_x \partial \boldsymbol{s}_y} D_{12}(x, y),$$
$$A_{21} = -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}_x \partial \boldsymbol{s}_y} D_{21}(x, y),$$
$$A_{22} = -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}_x \partial \boldsymbol{s}_y} D_{22}(x, y).$$

等式 (7.4.14) 获证。 ∎

矩阵函数 $\boldsymbol{D}(x, y)$ 与基本解 $\boldsymbol{E}_2(x, y)$ 有如下关系：

$$\boldsymbol{D}(x, y) = 4\mu^2 \boldsymbol{E}_2(x, y) - \frac{2\mu^2}{\pi(\lambda + 2\mu)} \boldsymbol{I}_2 \ln \frac{1}{|x - y|}. \tag{7.4.22}$$

下面讨论双层位势 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 的微商 $\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$，对 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_A$，应用等式 (7.4.14) 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x) &= -\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}_x \partial \boldsymbol{s}_y} \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{D}(x, y)\boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}_x} \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{D}(x, y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}_y} \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.4.23}$$

由等式 (7.4.22) 及 (7.4.23) 可知，双层位势的微商 $\boldsymbol{T}(\partial_x, n_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 可表示为 Navier 方程组的单层位势和 Laplace 方程单层位势的切向微商。由单层位势切向微商的连续性可知微商 $\boldsymbol{T}(\partial_x, n_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在 Γ_A 上连续而且：

$$\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x) = \frac{\partial}{\partial s_x} \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{D}(x, y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}_y} \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Gamma_A. \tag{7.4.24}$$

在后面的讨论中，我们将用公式 (7.4.24) 代替公式 (7.4.13)，这给我们的分析和实际计算带来了极大的方便 (避免了带超奇性核积分的计算)。

7.4.3　$\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在 Γ_A 上的新表达式 $(n = 3)$

首先我们引进一个新的微分算子 (Kupradze, 1979)：

$$\boldsymbol{U}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) = (U_{ij}(\partial_x, n_x))_{3\times 3}, \tag{7.4.25}$$

其中 $\boldsymbol{n}_x = (n_x^1, n_x^2, n_x^3)^{\mathrm{T}}$ 是一个单位向量，

$$U_{ij}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) = n_x^j \frac{\partial}{\partial x_i} - n_x^i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3. \tag{7.4.26}$$

显然:

$$
\begin{aligned}
&U_{11}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=U_{22}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=U_{33}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=0\\
&U_{32}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=-U_{23}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=n_x^2\frac{\partial}{\partial x_3}-n_x^3\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial s_{1,x}},\\
&U_{13}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=-U_{31}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=n_x^3\frac{\partial}{\partial x_1}-n_x^1\frac{\partial}{\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial s_{2,x}},\\
&U_{21}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=-U_{12}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)=n_x^1\frac{\partial}{\partial x_2}-n_x^2\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial s_{3,x}},
\end{aligned}
$$

这里 $\boldsymbol{s}_{1,x}=(0,-n_x^3,n_x^2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{s}_{2,x}=(n_x^3,0,-n_x^1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{s}_{3,x}=(-n_x^2,n_x^1,0)^{\mathrm{T}}$, 它们都垂直于单位向量 $\boldsymbol{n}_x$。

对于向量值函数 $\boldsymbol{u}(y)=(u_1(y),u_2(y),u_3(y))^{\mathrm{T}}$, 一个直接的计算可得 (Kupradze, 1979, p. 282):

$$
\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{u}=\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n_y}-\boldsymbol{n}_y\mathrm{div}_y\boldsymbol{u}+[\boldsymbol{n}_y\times\mathrm{rot}\boldsymbol{u}] \tag{7.4.27}
$$

$$
\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{u}=(\lambda+2\mu)\boldsymbol{n}_y\mathrm{div}_y\boldsymbol{u}-\mu[\boldsymbol{n}_y\times\mathrm{rot}\boldsymbol{u}]+2\mu\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{u}. \tag{7.4.28}
$$

将应力算子 $\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)$ 作用在基本解 $\boldsymbol{E}_3(x,y)$ 上, 通过计算可得 (Han, 1994-A):

引理 7.4.7

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_3(x,y))^{\mathrm{T}}=&\,2\mu(\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_3(x,y))^{\mathrm{T}}\\
&+\frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{I}_3\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}+\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\frac{1}{|x-y|}\right).
\end{aligned} \tag{7.4.29}
$$

■

为了推导 $\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在 Γ_A 上的新表达式还需要应用下面结果:

引理 7.4.8 当 $x\neq y$ 时, 下面的等式成立:

$$
\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{n}_x\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}=-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial s_{k,x}\partial s_{k,y}}\frac{1}{|x-y|}, \tag{7.4.30}
$$

$$
\nabla_x\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}=\boldsymbol{U}(\partial_y,n_y)\nabla_x\frac{1}{|x-y|}, \tag{7.4.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}-\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_x}\frac{1}{|x-y|}\\
&=\{\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)-\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\}\frac{1}{|x-y|}.
\end{aligned} \tag{7.4.32}
$$

证明

(i) 公式 (7.4.30) 已经在引理 7.2.2 中给出。

(ii) 令：

$$
\boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\nabla_x \frac{1}{|x-y|} = (H_1, H_2, H_3)^{\mathrm{T}},
$$

通过直接计算可得：

$$
\begin{aligned}
H_i &= \sum_{l=1}^{3} U_{il}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{|x-y|} \\
&= \sum_{l=1}^{3}\left(n_y^l \frac{\partial}{\partial y_i} - n_y^i \frac{\partial}{\partial y_l}\right)\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{|x-y|} \\
&= \sum_{l=1}^{3} n_y^l \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_l}\frac{1}{|x-y|} - n_y^i \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_l}\frac{1}{|x-y|} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{l=1}^{3} n_y^l \frac{\partial}{\partial y_l}\frac{1}{|x-y|} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\right), \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

因而等式 (7.4.31) 获证。

(iii) 令：

$$
\{\boldsymbol{U}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) - \boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{U}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\}\frac{1}{|x-y|} = (G_{ij})_{3\times 3}.
$$

则有

$$
\begin{aligned}
G_{ij} =& \left\{\sum_{l=1}^{3} U_{il}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)U_{lj}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) - \sum_{l=1}^{3} U_{il}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)U_{lj}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\right\}\frac{1}{|x-y|} \\
=& \sum_{l=1}^{3}\left(n_x^l \frac{\partial}{\partial x_i} - n_x^i \frac{\partial}{\partial x_l}\right)\left(n_y^j \frac{\partial}{\partial y_l} - n_y^l \frac{\partial}{\partial y_j}\right)\frac{1}{|x-y|} \\
&- \sum_{l=1}^{3}\left(n_y^l \frac{\partial}{\partial y_i} - n_y^i \frac{\partial}{\partial y_l}\right)\left(n_x^j \frac{\partial}{\partial x_l} - n_x^l \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{1}{|x-y|} \\
=& \sum_{l=1}^{3} n_x^l n_y^j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_l}\frac{1}{|x-y|} + \sum_{l=1}^{3} n_x^i n_y^l \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial y_j}\frac{1}{|x-y|} \\
&- \sum_{l=1}^{3} n_x^j n_y^l \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial y_i}\frac{1}{|x-y|} - \sum_{l=1}^{3} n_x^l n_y^i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_l}\frac{1}{|x-y|} \\
=& n_y^j \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_x}\frac{1}{|x-y|} + n_x^i \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|} - n_x^j \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|} \\
&- n_y^i \frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_x}\frac{1}{|x-y|}
\end{aligned}
$$

$$= U_{ij}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_x} \frac{1}{|x-y|} - U_{ij}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3.$$

等式 (7.4.32) 获证。 ■

将等式 (7.4.29) 代入双层位势 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 的表达式 (7.4.8)，应用 Stokes 定理 (Kupradze, 1979) 可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{II}(x) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \frac{1}{|x-y|} \boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y \\ & + 2\mu \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{E}_3(x,y) (\boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \boldsymbol{\rho}(y)) \mathrm{d}s_y. \end{aligned} \tag{7.4.33}$$

由等式 (7.4.33) 可知，我们已将 Navier 方程组的双层位势 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 表示为 Laplace 方程的双层位势，单层位势和 Navier 方程组单层位势之和。从公式 (7.4.33) 出发我们讨论 $\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 的微商 $\boldsymbol{T}(\partial_x, n_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$，则有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \boldsymbol{v}_{II}(x) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \left(\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \boldsymbol{I}_3 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right) \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y \\ & + \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(2\mu \boldsymbol{E}_3(x,y) - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \right) \boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y \\ \equiv & \boldsymbol{J}_0 + \boldsymbol{J}_1, \quad \forall\, x \in \Gamma_A. \end{aligned} \tag{7.4.34}$$

由 $\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)$ 的定义，可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_0 = & \frac{\rho}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \left(\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{n}_x \partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right) \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y \\ & + \frac{\lambda+\mu}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{n}_x \left(\nabla_x \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \right) \cdot \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y \\ & + \frac{\rho}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{U}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y. \end{aligned}$$

应用等式 (7.4.29) 可得：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_1 = & \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{U}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(4\mu^2 \boldsymbol{E}_3(x,y) - \frac{3\mu}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \boldsymbol{I}_3 \right) \boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y \\ & - \frac{\lambda+\mu}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{n}_x \left(\nabla_x \frac{1}{|x-y|} \cdot \boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \boldsymbol{\rho}(y) \right) \mathrm{d}s_y \\ & + \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma_A} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{1}{|x-y|} \boldsymbol{U}(\partial_y, \boldsymbol{n}_x) \boldsymbol{\rho}(y) \mathrm{d}s_y. \end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{J}_0, \boldsymbol{J}_1$ 的表达式代入 (7.4.34) 我们可得：

$$\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{n}_x\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y$$
$$+\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\Big(4\mu\boldsymbol{E}_3(x,y)$$
$$-\frac{3\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\Big)\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y+\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2,$$

其中，

$$\boldsymbol{D}_1=\frac{\lambda+\mu}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{n}_x\left\{\nabla_x\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\cdot\boldsymbol{\rho}(y)\right.$$
$$\left.-\nabla_x\frac{1}{|x-y|}\cdot\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{\rho}(y)\right\}\mathrm{d}s_y,$$
$$\boldsymbol{D}_2=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\left\{\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\boldsymbol{\rho}(y)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_x}\frac{1}{|x-y|}\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{\rho}(y)\right\}\mathrm{d}s_y.$$

应用等式 (7.4.31) 和 Stokes 定理，可得：

$$\int_{\Gamma_A}\nabla_x\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\cdot\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y$$
$$=\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\nabla_x\frac{1}{|x-y|}\cdot\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y$$
$$=\int_{\Gamma_A}\sum_{i,j=1}^{3}\left(U_{ij}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|}\right)\rho_i(y)\mathrm{d}s_y$$
$$=-\int_{\Gamma_A}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|}\sum_{i=1}^{3}(U_{ij}(\partial_y,n_y)\rho_i(y))\mathrm{d}s_y$$
$$=\int_{\Gamma_A}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-y|}\sum_{i=1}^{3}(U_{ji}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\rho_i(y))\mathrm{d}s_y$$
$$=\int_{\Gamma_A}\nabla_x\frac{1}{|x-y|}\cdot\boldsymbol{U}(\partial_y,n_y)\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y.$$

由此可得 $\boldsymbol{D}_1=0$。

应用 Stokes 公式和等式 (7.4.32)，可得：

$$\boldsymbol{D}_2=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\left\{\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\boldsymbol{\rho}(y)\right.$$
$$\left.-\left(\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_x}\frac{1}{|x-y|}\right)\boldsymbol{\rho}(y)\right\}\mathrm{d}s_y$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mu}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\{\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\\
&\quad -\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)(\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\}\frac{1}{|x-y|}\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y\\
&= -\frac{\mu}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\left(\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\frac{1}{|x-y|}\right)\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y\\
&\quad +\frac{\mu}{4\pi}\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\int_{\Gamma_A}\frac{1}{|x-y|}\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

综合上述分析，我们得:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x) &= \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_x}\int_{\Gamma_A}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_y}\frac{1}{|x-y|}\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y\\
&\quad +\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\int_{\Gamma_A}\left(4\mu\boldsymbol{E}_3(x,y)\right.\\
&\quad \left.-\frac{3\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\right)\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y,\quad \forall x\bar{\in}\Gamma_A.
\end{aligned}
\tag{7.4.35}
$$

从公式 (7.4.35) 可以看出 Navier 方程组双层位势的微商 $\boldsymbol{T}(\partial_x,n_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 可以表示为 Laplace 方程双层位势的法向微商和 Navier 方程组单层位势的切向微商之和。由此可知:

引理 7.4.9 双层位势的微商 $\boldsymbol{T}(\partial_x,n_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 在 Γ_A 连续而且

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x) &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial s_{k,x}}\int_{\Gamma_A}\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial\boldsymbol{\rho}(y)}{\partial s_{k,y}}\mathrm{d}s_y\\
&\quad +\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\int_{\Gamma_A}\left(4\mu\boldsymbol{E}_3(x,y)\right.\\
&\quad \left.-\frac{3\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\right)\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{\rho}(y)\mathrm{d}s_y.\quad \forall x\in\Gamma_A.
\end{aligned}
\tag{7.4.36}
$$

■

7.4.4 外问题的隐式人工边界条件

讨论 Navier 方程组的外问题:

$$
-\mu\Delta\boldsymbol{u}(x)-(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}(x))=\boldsymbol{f}(x),\quad \forall\, x\in\Omega, \tag{7.4.37}
$$

$$
\boldsymbol{u}(x)|_{\Gamma}=0, \tag{7.4.38}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{u}(x)\text{有界 }(n=2)\text{，当 }|x|\to\infty\text{ 时，}\\
&\boldsymbol{u}(x)\to 0(n=3)\text{，当 }|x|\to\infty\text{ 时.}
\end{aligned}\right\} \tag{7.4.39}
$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是以 Γ 为边界的外区域 (当 $n=2$ 时见图 7-1)，$\boldsymbol{f}(x)$ 是定义在 Ω 上的已知向量值函数，其支集是紧的。引进人工边界 $\Gamma_A \subset \Omega$ ($n=2$ 时，Γ_A 为简单光滑闭曲线；$n=3$ 时，Γ_A 为简单光滑闭曲面)，Γ_A 将 Ω 分割为有界区域 Ω_i 和无界区域 Ω_e，使 $\boldsymbol{f}(x) \equiv 0$, $\forall\, x \in \Omega_e$。

首先研究二维 Navier 方程组的外问题。在区域 Ω_e 上问题 (7.4.37)~(7.4.39)($n=2$) 的解 $\boldsymbol{u}(x)$ 满足齐次 Navier 方程组和无穷远边界条件：

$$-\mu\Delta \boldsymbol{u}(x) - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x)) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega_e, \tag{7.4.40}$$

$$\boldsymbol{u}(x)\text{有界，当 } |x| \to \infty \text{ 时。} \tag{7.4.41}$$

应用 Betti 公式，在无界区域 Ω_e 上可得 $\boldsymbol{u}(x)$ 的表达式 (Kupradze, 1979)：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(x) = &\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{E}_2(x,y)\boldsymbol{T}(\partial_y, n_y)\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y \\ &- \int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(\partial_y, n_y)\boldsymbol{E}_2(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y + \boldsymbol{\alpha}, \quad \forall\, x \in \Omega_e,\end{aligned} \tag{7.4.42}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_1, \alpha_2$ 是两个实数。

记：

$$\boldsymbol{\lambda}(x) = \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{u}(x)|_{\Gamma_A} \in R^2,$$

应用单层位势和双层位势的性质，在边界 Γ_A 上可得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{u}(x) = &\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{E}_2(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y \\ &- \int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_2(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y + \boldsymbol{\alpha}, \quad \forall\, x \in \Gamma_A,\end{aligned} \tag{7.4.43}$$

进一步在边界 Γ_A 上可得应力 $\boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{u}(x)|_{\Gamma_A} = \boldsymbol{\lambda}(x)$ 的表达式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(x) = &\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_2(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y \\ &- \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)(\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_2(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Gamma_A.\end{aligned}$$

将双层位势微商的新表达式 (7.4.23) 代入上式，我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(x) = &\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_2(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y \\ &- \frac{\partial}{\partial s_x}\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{D}(x,y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_y}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Gamma_A.\end{aligned} \tag{7.4.44}$$

等式 (7.4.43) 和 (7.4.44) 是二维问题 (7.4.37)~(7.4.39) 的解 $\boldsymbol{u}(x)$ 在任意形状人工边界 Γ_A 上满足的隐式人工边界条件。同时应用这两个隐式人工边界条件，可将二维边值问题 (7.4.37)~(7.4.39) 简化为有界区域 Ω_i 上等价的边值问题 (Han, 1990)：

$$\begin{cases} \text{求 } \{\boldsymbol{u}(x), \boldsymbol{\lambda}(x), \boldsymbol{\alpha}\} \text{ 使：} \\ -\mu\Delta\boldsymbol{u}(x) - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x)) = \boldsymbol{f}(x), \quad \forall\, x \in \Omega_i, & (7.4.45) \\ \boldsymbol{u}(x)|_{\Gamma} = 0, & (7.4.46) \\ \boldsymbol{\lambda}(x) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(x) + \displaystyle\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_2(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y \\ \qquad - \displaystyle\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)(\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2(x,y)\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y, \\ \qquad\qquad \forall\, x \in \Gamma_A, & (7.4.47) \\ \dfrac{1}{2}\boldsymbol{u}(x) = \displaystyle\int_{\Gamma_A} \boldsymbol{E}_2(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y \\ \qquad - \displaystyle\int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_2(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y + \boldsymbol{\alpha}, \\ \qquad\qquad \forall\, x \in \Gamma_A. & (7.4.48) \end{cases}$$

在 Ω_i 和 Γ_A 上引进适当的函数空间，可将边值问题 (7.4.45)~(7.4.48) 归化为等价的变分问题，然后进行数值计算并得到数值解的误差估计，有兴趣的读者可参阅论文 (Han, 1990; Han, 1993)。

在三维情况 ($n=3$)，问题 (7.4.37)~(7.4.39) 的解 $\boldsymbol{u}(x)$ 在区域 Ω_e 上限制满足：

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}(x) - (\lambda+\mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}(x)) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega_e, \tag{7.4.49}$$

$$\boldsymbol{u}(x) \to 0, \text{当} |x| \to +\infty. \tag{7.4.50}$$

应用 Betti 公式在无界区域 Ω_e 上可得 $\boldsymbol{u}(x)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x) = & \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{E}_3(x,y)\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y \\ & - \int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_3(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall\, x \in \Omega_e. \end{aligned}$$

记：

$$\boldsymbol{\lambda}(x) = \boldsymbol{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{u}(x)|_{\Gamma_A} \in R^3,$$

应用单层位势和双层位势及其微商的性质，在边界 Γ_A 上可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\boldsymbol{u}(x) = & \int_{\Gamma_A} \boldsymbol{E}_3(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y \\ & - \int_{\Gamma_A} (\boldsymbol{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_3(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y, \ \forall\, x \in \Gamma_A, \end{aligned} \tag{7.4.51}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(x)=\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_3(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y-\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)(\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_3(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y,\quad \forall\, x\in\Gamma_A.$$

将 $\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{v}_{II}(x)$ 的新表达式 (7.4.36) 代入上式，我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(x)=&\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_3(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y\\&-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial s_{k,x}}\int_{\Gamma_A}\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial\boldsymbol{u}(y)}{\partial s_{k,y}}\mathrm{d}s_y\\&-\boldsymbol{U}(\partial_x,n_x)\int_{\Gamma_A}\left(4\mu\boldsymbol{E}_3(x,y)-\frac{3\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\right)\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y,\\&\forall\, x\in\Gamma_A.\end{aligned}\tag{7.4.52}$$

等式 (7.4.51) 和 (7.4.52) 是三维 Navier 方程组外问题的解 $\boldsymbol{u}(x)$ 在任意形状人工边界 Γ_A 上满足的隐式人工边界条件，直接应用 (7.4.51) 和 (7.4.52) 可将三维 Navier 方程组外问题 (7.4.37)~(7.4.39) 等价地简化为有界区域 Ω_i 上等价的边值问题：

$$\left\{\begin{aligned}&\text{求 }\boldsymbol{u}(x),\boldsymbol{\lambda}(x)\text{ 使：}\\&-\mu\Delta\boldsymbol{u}(x)-(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}(x))=\boldsymbol{f}(x),\quad\forall\, x\in\Omega_i, &(7.4.53)\\&\boldsymbol{u}(x)|_{\Gamma}=0, &(7.4.54)\\&\boldsymbol{\lambda}(x)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(x)+\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{T}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\boldsymbol{E}_3(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y\\&\qquad-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial s_{k,x}}\int_{\Gamma_A}\frac{\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial\boldsymbol{u}(y)}{\partial s_{k,y}}\mathrm{d}s_y\\&\qquad-\boldsymbol{U}(\partial_x,\boldsymbol{n}_x)\int_{\Gamma_A}\Big(4\mu\boldsymbol{E}_3(x,y)\\&\qquad-\frac{3\mu}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\Big)\boldsymbol{U}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y,\quad\forall\, x\in\Gamma_A, &(7.4.55)\\&\frac{1}{2}\boldsymbol{u}(x)=\int_{\Gamma_A}\boldsymbol{E}_3(x,y)\boldsymbol{\lambda}(y)\mathrm{d}s_y\\&\qquad-\int_{\Gamma_A}(\boldsymbol{T}(\partial_y,\boldsymbol{n}_y)\boldsymbol{E}_3(x,y))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(y)\mathrm{d}s_y,\quad\forall\, x\in\Gamma_A. &(7.4.56)\end{aligned}\right.$$

与二维情况完全类似，在区域 Ω_i 上引进适当的函数空间可将三维边值问题 (7.4.53)~(7.4.56) 等价地归化为变分问题，从而可得到数值近似解和数值解的最优误差估计 (Han, 1994-A)。

7.5 声波方程的隐式人工边界条件

讨论声波方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0. \tag{7.5.1}$$

以 $E_n(x,t;y,\tau)$ 表示声波方程 (7.5.1) 的基本解，$E_n(x,t;y,\tau)$ 满足：

$$\Delta_y E_n - \frac{\partial^2 E_n}{\partial \tau^2} = -\delta(x-y)\delta(t-\tau), \tag{7.5.2}$$

并且 (Kythe, 1996; Jones, 1986)：

$$E_1(x,t;y,\tau) = \frac{1}{2}H(t-\tau-|x-y|), \tag{7.5.3}$$

$$E_2(x,t;y,\tau) = \frac{H(t-\tau-|x-y|)}{2\pi\sqrt{(t-\tau)^2-|x-y|^2}}, \tag{7.5.4}$$

$$E_3(x,t;y,\tau) = \frac{1}{4\pi|x-y|}\delta(t-\tau-|x-y|), \tag{7.5.5}$$

其中，

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

$H(x)$ 是 Heaviside 函数。

设 $\Gamma_A \subset \mathbb{R}^n$ (Γ_A 是一闭曲面 $(n=3)$ 或 Γ_A 是一条闭曲线 $(n=2)$)，Γ_A 将 $\mathbb{R}^n$ 分割为有界区域 Ω_A 和外区域 Ω_e。设 $u(x,t)$ 是方程 (7.5.1) 在区域 $\Omega_e \times [0,T]$ 上的解，而 $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$, $\forall\, x \in \Omega_e$。我们知道 $u(x,t)$ 在 $\Omega_e \times [0,T]$ 上的支集是紧的。

由 Green 公式可得：

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\Omega_e} \{w(u_{\tau\tau} - \Delta_y u) - u(w_{\tau\tau} - \Delta_y w)\} \mathrm{d}y \mathrm{d}\tau \\ =& \int_{\Omega_e} (w u_\tau - u w_\tau) \mathrm{d}y |_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t \int_{\Gamma_A} \left\{ -w \frac{\partial}{\partial n_y} u + u \frac{\partial}{\partial n_y} w \right\} \mathrm{d}s_y \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

7.5.1 三维声波方程的 Kirchhoff 公式

在三维情况 $(n=3)$，在公式 (7.5.6) 中取 w 为三维声波方程的基本解：

$$w = \frac{1}{4\pi|x-y|}\delta(t-\tau-|x-y|). \tag{7.5.7}$$

由 (7.5.6) 式得到三维声波方程的 Kirchhoff 公式 (Jones, 1986, p.36)：

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\left\{\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial n_y}u(y,T_0)-u(y,T_0)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\right.\\
&\left.+\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial T_0}u(y,T_0)\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|\right\}\mathrm{d}s_y,\\
&\forall\ (x,t)\in\Omega_e\times(0,T],
\end{aligned}\tag{7.5.8}
$$

其中 $T_0=t-|x-y|$。

公式 (7.5.8) 给出了三维声波方程 7.5.1 在区域 $\Omega_e\times(0,T]$ 上解 $u(x,t)$ 的表达式，它是由三个在边界 Γ_A 上的积分组成。应用边界积分的性质，由公式 (7.5.8) 可知在边界 $\Gamma_A\times(0,T]$ 上 $u(x,t)$ 满足 (Teng, 2003)

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{\Theta(x)}{4\pi}\right)u(x,t)=&\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_A}\left\{\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial n_y}u(y,T_0)\right.\\
&+\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial T_0}u(y,T_0)\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|\\
&\left.-u(y,T_0)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\right\}\mathrm{d}s_y,\\
&\forall\ (x,t)\in\Gamma_A\times(0,T],
\end{aligned}\tag{7.5.9}
$$

其中 $\Theta(x)$ 表示区域 Ω_e 在点 $x\in\Gamma_A$ 所张的立体角.

当 Γ_A 在点 x 光滑时，$\Theta(x)=2\pi$，即有：

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_A}\left\{\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial n_y}u(y,T_0)+\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial}{\partial T_0}u(y,T_0)\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|\right.\\
&\left.-u(y,T_0)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\right\}\mathrm{d}s_y,\quad\forall\ (x,t)\in\Gamma_A\times(0,T],
\end{aligned}\tag{7.5.10}
$$

等式 (7.5.9) 是在任意形状的人工边界 $\Gamma_A\times(0,T]$ 上原问题的解 $u(x,t)$ 满足的完全吸收的人工边界条件。进一步滕震寰在论文 (Teng, 2003) 中应用边界条件 (7.5.9) 计算了三维声波方程外问题的数值解。

对二维问题可得到类似的结果，即二维声波方程的 Volterra 公式 (Kythe, 1996; Jones, 1986)。本章内容的主要参考文献为：Han (1988, 1990, 1993, 1994-A, 1994-B, 1995); Teng (2003)。其他的相关工作可参阅 Johnson and Nedelec (1980): Gatica, Gatica and Stephan (2003); Meddahi, Gonzalez and Perez (2000); Kupradze (1979); Chen and Zhou (1992); Nedelec (2001)。

第 8 章　非线性人工边界条件

在前面 7 章中，我们讨论了数值求解无界区域上线性偏微分方程的人工边界方法。无界区域上非线性偏微分方程的数值求解问题在科学和工程计算中更具有挑战性。从人工边界方法发展的初期开始，人们一直关注这个问题，例如：Hagstrom and Keller (1987) 研究了无界区域上的非线性椭圆型方程的渐近边界条件；Han, Lu and Bao (1994) 研究了管道中 Navier-Stokes 流的数值模拟；Gatica, Gatica and Stephan (2003) 研究了非线性不可压弹性方程组外问题的数值近似。在上述论文中，作者将所讨论的非线性偏微分方程在人工边界之外的无界区域上进行线性化，然后应用我们在前 7 章中对线性偏微分方程给出的方法在人工边界上得到相应的人工边界条件，显然对于非线性偏微分方程这是一类近似人工边界条件，它的近似程度依赖于对原始非线性方程线性化产生的误差。

最近人们对无界区域上非线性偏微分方程数值求解的研究有了新的进展，对某些非线性偏微分方程在人工边界上得到了准确的非线性人工边界条件。例如，Han, Wu and Xu (2006) 对 Burgers 方程，Xu, Han and Wu (2006) 对 Kardar-Parisi-Zhang (K-P-Z) 方程通过非线性变换的方法得到了准确的非线性人工边界条件。Zheng (2006-A) 应用反散射方法对一维三次非线性 Schrödinger 方程得到了准确的非线性人工边界条件。在 8.1 节 ~8.3 节中将分别叙述上述结果。同时 Antonie, Besse and Descombes (2006) 研究了一维三次非线性 Schrödinger 方程的近似非线性边界条件，得到了非线性积分 - 微分边界条件。Szeftel (2006-A, 2006-B) 讨论了一维非线性波方程和一维非线性 Schrödinger 方程的近似非线性吸收边界条件。Xu Z. and Han H. (2006) 提出了构造非线性发展方程的近似非线性吸收边界条件的 SLAB (Split Local Absorbing boundary) 方法。SLAB 方法的基本思想是将算子分裂法与对应线性问题的局部人工边界条件相结合，构造出非线性发展方程的近似非线性人工边界条件。SLAB 方法不仅可以应用于一维非线性问题，它也能够处理高维非线性问题。在 8.4 节中我们将讨论 SLAB 方法。

8.1　Burgers 方程

考虑下面 Burgers 方程的初边值问题：

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,T], \tag{8.1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \tag{8.1.2}$$

$$u(x,t)\to 0,\quad 当\ |x|\to +\infty\ 时,\ \ \forall\, t\in[0,T], \tag{8.1.3}$$

其中 $\nu>0$ 为粘性系数，$f(x,t)$，$u_0(x)$ 为已知函数，其支集是紧的，满足

$$\mathrm{supp}\{f(x,t)\}\subset[x_l,x_r]\times[0,T],\quad \mathrm{supp}\{u_0(x)\}\subset[x_l,x_r],$$

其中 $x_l<x_r$。初边值问题 (8.1.1)~(8.1.3) 定义在无界区域 $\mathbb{R}^1\times[0,T]$ 上。Burgers 方程虽然是一个简单的非线性方程，但它是很多重要非线性问题的简化模型 (Burgers, 1948)。

8.1.1　Burgers 方程的非线性人工边界条件

引进人工边界：

$$\Sigma_l=\{(x,t)|\ x=x_l,0\leqslant t\leqslant T\},$$

$$\Sigma_r=\{(x,t)|\ x=x_r,0\leqslant t\leqslant T\}.$$

Σ_l，Σ_r 将无界区域 $\mathbb{R}^1\times[0,T]$ 分割为三部分：

$$D_l=\{(x,t)|\ x\leqslant x_l,0\leqslant t\leqslant T\},$$

$$D_r=\{(x,t)|\ x\geqslant x_r,0\leqslant t\leqslant T\},$$

$$D_i=\{(x,t)|\ x_l<x<x_r,0\leqslant t\leqslant T\}.$$

我们的目的是将原问题 (8.1.1)~(8.1.3) 等价地简化为有界计算区域 D_i 上的问题，然后进行数值计算。因而我们需要在人工边界 Σ_l，Σ_r 上找出原问题的解 $u(x,t)$ 满足的准确边界条件。首先考虑原问题的解在无界区域 D_r 上的限制，$u(x,t)$ 在 D_r 上满足：

$$u_t+uu_x-\nu u_{xx}=0,\quad \forall\ (x,t)\in D_r, \tag{8.1.4}$$

$$u|_{t=0}=0,\quad x_r\leqslant x<+\infty, \tag{8.1.5}$$

$$u\to 0,\quad 当\ x\to+\infty, \tag{8.1.6}$$

$$u|_{x=x_r}=u(x_r,t),\quad 0<t\leqslant T. \tag{8.1.7}$$

由于函数 $u(x_r,t)$ 是未知的，问题 (8.1.4)~(8.1.7) 不能独立地求解。如果 $u(x_r,t)$ 已知，则问题 (8.1.4)~(8.1.7) 是适定的，我们可以解析地求出问题 (8.1.4)~(8.1.7)

的解。应用 Cole-Hopf 变换 (Evans, 1998)，令：

$$\omega(x,t) = -\int_x^{+\infty} u(y,t)\mathrm{d}y, \quad x_r \leqslant x < +\infty,$$

则：

$$\omega_t = -\int_x^{+\infty} u_t(y,t)\mathrm{d}y = \nu u_x - \frac{1}{2}u^2,$$

$$\omega_x = u, \qquad \omega_{xx} = u_x.$$

我们得到：

$$\omega_t + \frac{1}{2}\omega_x^2 - \nu\omega_{xx} = 0,$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad x_r \leqslant x < +\infty,$$

$$w|_{x=x_r} = w(x_r, t),$$

$$w \to 0, \quad \text{当 } x \to +\infty.$$

进一步令：

$$v = \psi(\omega) - 1, \quad \text{其中} \quad \psi(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega}{2\nu}},$$

则函数 v 是下面问题的解：

$$v_t = \nu v_{xx}, \quad \forall (x,t) \in D_r, \tag{8.1.8}$$

$$v|_{x=x_r} = v(x_r, t), \tag{8.1.9}$$

$$v \to 0 \quad \text{当} \quad x \to +\infty \tag{8.1.10}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \forall x \in [x_r, +\infty). \tag{8.1.11}$$

在论文 (Han and Huang, 2002-A) 中讨论了抛物型偏微分方程的初边值问题 (8.1.8)~(8.1.11)，并给出了问题的解 $v(x,t)$ 在人工边界 Σ_r 上满足的准确人工边界条件：

$$\frac{\partial v(x_r,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\frac{\partial v(x_r,\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau. \tag{8.1.12}$$

注意到：

$$v_x = \psi'(\omega)u, \quad v_t = \psi'(\omega)\left(\nu u_x - \frac{1}{2}u^2\right).$$

记：

$$\psi'(\omega)|_{x=x_r} = -\frac{1}{2\nu}\exp\left(-\frac{\omega}{2\nu}\right)\bigg|_{x=x_r} \equiv G(t).$$

由 (8.1.12) 可得：

$$u(x_r,t)=-\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t\frac{G(\tau)}{G(t)\sqrt{t-\tau}}\left\{\nu u_x(x_r,\tau)-\frac{1}{2}u(x_r,\tau)^2\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{8.1.13}$$

等式 (8.1.13) 是 Burgers 方程的解在人工边界 Σ_r 上满足的准确人工边界条件。由于函数 $G(t)$ 依赖未知函数 $u(x_r,t)$，这是一个非线性人工边界条件。由函数 $G(t)$ 的定义可知函数 $G(t)$ 包含未知函数 $u(x_r,t)$ 的无穷积分。边界条件 (8.1.13) 不能直接应用于数值计算，需要进一步对其简化。记

$$g_r(t)=-\frac{1}{2\nu}\omega(x_r,t)=\frac{1}{2\nu}\int_{x_r}^{+\infty}u(y,t)\mathrm{d}y,$$

则：

$$\frac{\mathrm{d}g_r(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\nu}\int_{x_r}^{+\infty}u_t(y,t)\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}u_x(x_r,t)+\frac{1}{4\nu}u(x_r,t)^2, \tag{8.1.14}$$

$$g_r(0)=0. \tag{8.1.15}$$

由此可得：

$$g_r(t)=\int_0^t\left(-\frac{1}{2}u_x(x_r,\tau)+\frac{1}{4\nu}u(x_r,\tau)^2\right)\mathrm{d}\tau, \tag{8.1.16}$$

$$G(t)=-\frac{1}{2\nu}\exp\{g_r(t)\}. \tag{8.1.17}$$

将 (8.1.17) 代入 (8.1.13)，我们在人工边界 Σ_r 上得到了第一个非线性人工边界条件：

$$\begin{aligned}u(x_r,t)=&-\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t\frac{\mathrm{e}^{g_r(\tau)-g_r(t)}}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\nu u_x(x_r,\tau)-\frac{1}{2}u(x_r,\tau)^2\right\}\mathrm{d}\tau\\ \equiv& R_1(u|_{x=x_r},g_r,t).\end{aligned} \tag{8.1.18}$$

应用 Abel 变换(Arfken, 1985)，由 (8.1.18) 在人工边界 Σ_r 上可得第二个等价的非线性人工边界条件：

$$\begin{aligned}\nu u_x(x_r,t)=&\frac{1}{2}u(x_r,t)^2-\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial}{\partial\tau}(\mathrm{e}^{g_r(\tau)-g_r(t)}u(x_r,\tau))\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{t-\tau}}\\ \equiv& R_2(u|_{x=x_r},g_r,t),\end{aligned} \tag{8.1.19}$$

其中 $g_r(t)$ 由公式 (8.1.16) 给出。

完全类似地在人工边界 Σ_l 上我们得到 Burgers 方程的两个非线性人工边界条件：

$$
\begin{aligned}
u(x_l,t) &= \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^{g_l(\tau)-g_l(t)}}{\sqrt{t-\tau}}\left\{\nu u_x(x_l,\tau)-\frac{1}{2}u(x_l,\tau)^2\right\}\mathrm{d}\tau \\
&\equiv L_1(u|_{x=x_l},g_l,t).
\end{aligned}
\tag{8.1.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu u_x(x_l,t) &= \frac{1}{2}u(x_l,t)^2+\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}(\mathrm{e}^{g_l(\tau)-g_l(t)}u(x_l,\tau))\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau \\
&\equiv L_2(u|_{x=x_l},g_l,t),
\end{aligned}
\tag{8.1.21}
$$

其中，

$$
g_l(t)=\int_0^t\left\{-\frac{1}{2}u_x(x_l,\tau)+\frac{1}{4\nu}u(x_l,\tau)^2\right\}\mathrm{d}\tau. \tag{8.1.22}
$$

8.1.2 有界计算区域 D_i 上等价的 Burgers 方程的初边值问题

应用 8.1.1 节给出的非线性人工边界条件 (8.1.19)，(8.1.21) (或者 (8.1.18)，(8.1.20))，可将原问题 (8.1.1)~(8.1.3) 等价地简化为有界计算区域 D_i 上的初边值问题：

$$
u_t+uu_x-\nu u_{xx}=f(x),\quad \forall\ (x,t)\in D_i, \tag{8.1.23}
$$

$$
\nu u_x(x_l,t)=L_2(u|_{x=x_l},g_l,t),\quad \forall\ t\in(0,T], \tag{8.1.24}
$$

$$
\nu u_x(x_r,t)=R_2(u|_{x=x_r},g_r,t),\quad \forall\ t\in(0,T], \tag{8.1.25}
$$

$$
u(x,0)=u_0(x),\quad \forall\ x\in[x_l,x_r]. \tag{8.1.26}
$$

首先分析 Burgers 方程初边值问题 (8.1.23)~(8.1.26) 解的稳定性。以 $u(x,t)$ 乘以 Burgers 方程 (8.1.23)，在区域 $[x_l,x_r]\times[0,t]$ 上积分，经过分部积分并应用边界条件 (8.1.24)~(8.1.25) 和初始条件 (8.1.26) 可得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{x_l}^{x_r}(u(x,t))^2\mathrm{d}x+\nu\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}(u_x(x,\tau))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \\
&+\int_0^t\left\{\frac{1}{3}(u(x_r,\tau))^3-R_2(u|_{x=x_r},g_r,\tau)u(x_r,\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\
&-\int_0^t\left\{\frac{1}{3}(u(x_l,\tau))^3-L_2(u|_{x=x_l},g_l,\tau)u(x_l,\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\
=&\frac{1}{2}\int_{x_l}^{x_r}(u_0(x))^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}f(x,\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{8.1.27}
$$

我们证明下面引理：

引理 8.1.1 下面的不等式成立：

$$\int_0^t \left\{\frac{1}{3}[u(x_r,\tau)]^3 - R_2(u|_{x=x_r}, g_r, \tau)u(x_r,\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \geqslant 0, \quad \forall\, t \in (0,T], \tag{8.1.28}$$

$$-\int_0^t \left\{\frac{1}{3}[u(x_l,\tau)]^3 - L_2(u|_{x=x_l}, g_l, \tau)u(x_l,\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \geqslant 0, \quad \forall\, t \in (0,T]. \tag{8.1.29}$$

其中 $u(x,t)$ 是问题 (8.1.23)~(8.1.26) 的解。

证明 考虑辅助问题：

$$v_t + vv_x - \nu v_{xx} = 0, \quad \forall\,(x,t) \in (x_r,+\infty)\times(0,T], \tag{8.1.30}$$

$$v(x_r,t) = u(x_r,t), \quad \forall\, t \in (0,T], \tag{8.1.31}$$

$$v(x,0) = 0, \quad \forall\, x \in [x_r,+\infty). \tag{8.1.32}$$

由非线性人工边界条件的推导过程可知原问题 (8.1.1)~(8.1.3) 的解 $u(x,t)$ 在有界计算区域的限制是初边值问题 (8.1.23)~(8.1.26) 的解，$u(x,t)$ 在 $[x_r,+\infty)\times[0,T]$ 上的限制是辅助问题 (8.1.30)~(8.1.32) 的解。即：

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad \forall\,(x,t) \in (x_r,+\infty)\times(0,T], \tag{8.1.33}$$

$$u(x_r,t) = u(x_r,t), \quad \forall\, t \in (0,T], \tag{8.1.34}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \forall\, x \in [x_r,+\infty). \tag{8.1.35}$$

以 $u(x,t)$ 乘以方程 (8.1.33) 两边，在 $[x_r,+\infty)\times[0,T]$ 上积分，并分部积分可得：

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left\{\frac{1}{3}(u(x_r,\tau))^3 - R_2(u|_{x=x_r}, g_r, \tau)u(x_r,\tau)\right\}\mathrm{d}\tau\\ =& \int_{x_r}^{+\infty}\frac{1}{2}(u(x,t))^2\mathrm{d}x + \nu\int_0^t\int_{x_r}^{+\infty}(u_x(x,\tau))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau \geqslant 0.\end{aligned}$$

即不等式 (8.1.28) 成立。类似地可得不等式 (8.1.29) 成立。 ■

应用引理 8.1.1，由等式 (8.1.27) 可得：

$$\frac{1}{2}\int_{x_l}^{x_r}(u(x,t))^2\mathrm{d}x + \nu\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}(u_x(x,\tau))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{x_l}^{x_r}(u_0(x))^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}f(x,\tau)u(x,\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{x_l}^{x_r}(u_0(x))^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}(f(x,\tau))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}[u(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau. \tag{8.1.36}$$

令：

$$F(t)=\int_{x_l}^{x_r}(u_0(x))^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}(f(x,\tau))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,$$

$$Y(t)=\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}(u(x,\tau))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,$$

则：

$$Y'(t)=\int_{x_l}^{x_r}(u(x,t))^2\mathrm{d}x,\quad Y(0)=0.$$

由 (8.1.36) 可得：

$$Y'(t)\leqslant Y(t)+F(t),$$

进一步有：

$$Y(t)\leqslant Y(0)\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t\int_0^t F(\tau)\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau=\int_0^t F(\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau.$$

再应用不等式 (8.1.36) 可得：

$$\frac{1}{2}\int_{x_l}^{x_r}[u(x,t)]^2\mathrm{d}x+\nu\int_0^t\int_{x_l}^{x_r}[u_x(x,\tau)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}F(t)+\frac{1}{2}\int_0^t F(\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau,\quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{8.1.37}$$

最后我们得到 Burgers 方程初边值问题 (8.1.23)~(8.1.26) 解的稳定性估计 (8.1.37)。即有下面结果成立：

引理 8.1.2 Burgers 方程初边值问题 (8.1.23)~(8.1.26) 的解 $u(x,t)$ 满足稳定性估计式 (8.1.37)。 ■

由有界计算区域 D_i 上的 Burgers 方程的初边值问题 (8.1.23)~(8.1.26) 出发，对问题进行差分离散化，最后可得无界区域 $R^1\times[0,T]$ 上 Burgers 方程初值问题在有界计算区域 D_i 上的数值近似解 (Han, Wu and Xu, 2006)。

8.2 Kardar-Parisi-Zhang 方程

在这一节我们讨论无界区域上 Kardar-Parisi-Zhang 方程的数值模拟。K-P-Z 方程是描述薄膜生长的一个重要物理模型 (Kardar, Parisi and Zhang, 1986)：

$$u_t = \nu\Delta u + \lambda|\nabla u|^2 + \eta, \tag{8.2.1}$$

其中 $u = u(x,t), (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T]$。当 $d = 2$ 时，$u(x,t)$ 表示薄膜生长的厚度。$\nu > 0$ 表示扩散系数，$\lambda > 0$ 是非线性的影响系数，函数 $\eta = \eta(x,t)$ 表示由随机力产生的高斯白噪声。考虑下面确定性的 K-P-Z 方程的初值问题 (为了表述上的简便, 取 $\nu = \lambda = 1$)：

$$u_t = \Delta u + |\nabla u|^2 + f(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T] \tag{8.2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{8.2.3}$$

$$u \to 0, \quad 当\ |x| \to +\infty, \tag{8.2.4}$$

其中初值 $u_0(x)$ 和方程 (8.2.2) 中的函数 $f(x,t)$ 是已知的，并且假设它们的支集是紧的，即：

$$\mathrm{supp}\{f(x,t)\} \subset B_0^{d,R} \times [0,T], \quad \mathrm{supp}\{u_0(x)\} \subset B_0^{d,R}, \tag{8.2.5}$$

其中 $B_0^{d,R} = \{x \mid |x| \leqslant R,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^d\}$。

确定性的 K-P-Z 方程同时也是粘性 Hamilton-Jacobi 方程的最简单模型，这一类方程的数值求解近年来引起了很多学者 (如 Bryson and Levy (2003), Zhang and Shu (2003)) 的关注。为了将 K-P-Z 方程的初值问题 (8.2.2)~(8.2.4) 简化到有界计算区域上进行数值计算，引进人工边界：

$$\Sigma_R = \partial B_0^{d,R} \times [0,T].$$

人工边界 Σ_R 将无界区域 $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ 分割为有界计算区域 $B_0^{d,R} \times [0,T]$ 和无界计算区域 $\Omega_e \times [0,T]$，其中 $\Omega_e = \mathbb{R}^d \setminus B_0^{d,R}$。为了推导原问题 (8.2.2)~(8.2.4) 的解 $u(x,t)$ 在人工边界 Σ_R 上满足的边界条件，我们考虑 $u(x,t)$ 在无界区域 $\Omega_e \times [0,T]$ 上的限制，$u(x,t)$ 满足：

$$u_t = \Delta u + |\nabla u|^2, \quad \forall\ (x,t) \in \Omega_e \times (0,T] \tag{8.2.6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \forall\ x \in \Omega_e, \tag{8.2.7}$$

$$u \to 0, \quad 当\ |x| \to +\infty. \tag{8.2.8}$$

如果在人工边界 Σ_R 已知 $u(x,t)$，则上述问题的解是存在且唯一的。通过 Cole-Hopf 变换

$$v = e^u - 1, \tag{8.2.9}$$

可将上述问题归化为线性热传导方程的初边值问题：

$$v_t = \Delta v, \quad \forall\ (x,t) \in \Omega_e \times (0,T], \tag{8.2.10}$$

$$v(x,0) = 0, \quad x \in \Omega_e, \tag{8.2.11}$$

$$v \to 0, \quad \text{当 } |x| \to +\infty. \tag{8.2.12}$$

这样我们就将在人工边界 Γ_R 上寻找非线性 K-P-Z 方程人工边界条件的问题简化为寻找线性热传导方程的人工边界条件的问题。下面分别对 $d = 1,2,3$ 的情况给出问题的解答。

8.2.1 K-P-Z 方程的非线性人工边界条件 ($d = 1$)

在 $d = 1$ 的一维情况，无界区域 $\Omega_e = \{x \mid |x| > R,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^1\}$ 由 $\Omega_l = \{x|x < -R\}$ 和 $\Omega_r = \{x|x > R\}$ 两条半无限长的直线组成。我们分别在区域 $\Omega_r \times [0,T]$ 和 $\Omega_l \times [0,T]$ 上考虑问题 (8.2.10)~(8.2.12)。这是一维的热传导方程问题，在论文 (Han and Huang, 2002-A) 中在人工边界 $\{x|x = R\} \times [0,T]$ 和 $\{x|x = -R\} \times [0,T]$ 上已经得到了未知函数 $v(x,t)$ 满足的准确边界条件：

$$\frac{\partial v(R,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial v(R,\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{d}\tau, \tag{8.2.13}$$

$$\frac{\partial v(-R,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial v(-R,\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{d}\tau. \tag{8.2.14}$$

应用变换 (8.2.9)，由 (8.2.13)~(8.2.14) 可得原问题的解 $u(x,t)$ 在人工边界 $\{x|x = R\} \times [0,T]$ 和 $\{x|x = -R\} \times [0,T]$ 上满足的准确非线性边界条件：

$$\frac{\partial u(R,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial u(R,\tau)}{\partial \tau} \frac{\mathrm{e}^{u(R,\tau)-u(R,t)}}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{d}\tau, \tag{8.2.15}$$

$$\frac{\partial u(-R,t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial u(-R,\tau)}{\partial \tau} \frac{\mathrm{e}^{u(-R,\tau)-u(-R,t)}}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{d}\tau. \tag{8.2.16}$$

应用非线性边界条件 (8.2.15)~(8.2.16)，可将 K-P-Z 方程的初值问题 (8.2.2)~

(8.2.4) 等价地简化为有界计算区域 $[-R,R]\times[0,T]$ 上的初边值问题:

$$u_t=\Delta u+|\nabla u|^2+f(x,t),\quad \forall\ (x,t)\in(-R,R)\times(0,T] \tag{8.2.17}$$

$$\frac{\partial u(R,t)}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial u(R,\tau)}{\partial\tau}\frac{\mathrm{e}^{u(R,\tau)-u(R,t)}}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau,\forall\ t\in(0,T], \tag{8.2.18}$$

$$\frac{\partial u(-R,t)}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial u(-R,\tau)}{\partial\tau}\frac{\mathrm{e}^{u(-R,\tau)-u(-R,t)}}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau,\forall\ t\in(0,T], \tag{8.2.19}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in[-R,R]. \tag{8.2.20}$$

在有界计算区域 $[-R,R]\times[0,T]$ 上求出初边值问题 (8.2.17)~(8.2.20) 的数值解即可得到原问题的数值近似解。

8.2.2　K-P-Z 方程的非线性人工边界条件 ($d=2$)

在 $d=2$ 的情况，无界区域 $\Omega_e=\{x\mid |x|>R,\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}^2\}$ 是半径为 R 的圆的外部。在极坐标

$$\left.\begin{aligned}x_1&=r\cos\theta,\\ x_2&=r\sin\theta,\end{aligned}\right\} \tag{8.2.21}$$

下可将问题 (8.2.10)~(8.2.12) 的解 $v(x,t)$ 展开为傅氏级数:

$$v(r,\theta,t)=\frac{a_0(r,t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r,t)\cos n\theta+b_n(r,t)\sin n\theta, \tag{8.2.22}$$

其中 $a_n(r,t)$ 满足:

$$\frac{\partial a_n}{\partial t}-\frac{\partial^2 a_n}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_n}{\partial r}+\frac{n^2}{r^2}a_n=0,\quad r>R,\ 0<t\leqslant T, \tag{8.2.23}$$

$$a_n|_{r=R}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}v(R,\theta,t)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,\quad 0<t\leqslant T, \tag{8.2.24}$$

$$a_n|_{t=0}=0,\quad r\geqslant R, \tag{8.2.25}$$

$b_n(r,t)$ 满足:

$$\frac{\partial b_n}{\partial t}-\frac{\partial^2 b_n}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial b_n}{\partial r}+\frac{n^2}{r^2}b_n=0,\quad r>R,\ 0<t\leqslant T, \tag{8.2.26}$$

$$b_n|_{r=R}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}v(R,\theta,t)\sin n\theta\mathrm{d}\theta,\quad 0<t\leqslant T, \tag{8.2.27}$$

$$b_n|_{t=0}=0,\quad r\geqslant R. \tag{8.2.28}$$

分别求解问题(8.2.23)~(8.2.25) 和 (8.2.26)~(8.2.28) 可得问题 (8.2.10)~(8.2.12) 的解 v 及其微商 $\dfrac{\partial v}{\partial r}$, $\dfrac{\partial v}{\partial \tau}$ 在人工边界 Σ_R 满足的准确边界条件 (Han and Huang, 2002-B):

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(R,\theta,t)}{\partial r}=&-\frac{1}{2R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial v(R,\phi,\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\phi\frac{H_0(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau\\&-\frac{1}{R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial v(R,\phi,\tau)}{\partial \tau}\cos n(\phi-\theta)\mathrm{d}\phi\frac{H_n(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau\\&-\frac{1}{R\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^{2\pi}v(R,\phi,t)\cos n(\phi-\theta)\mathrm{d}\phi,\end{aligned}\tag{8.2.29}$$

其中特殊函数:

$$H_n(t)=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mu^2 t}}{J_n^2(\mu R)+Y_n^2(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}.$$

应用变换 (8.2.9), 由上式可得二维 K-P-Z 方程在人工边界 Σ_R 的非线性人工边界条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial r}=&-\frac{1}{2R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\{\exp[u(R,\phi,\tau)\\&-u(R,\theta,t)]\}\frac{H_0(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\tau\\&-\frac{1}{R\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\{\exp[u(R,\phi,\tau)-u(R,\theta,t)]\}\\&\cdot\cos n(\phi-\theta)\frac{H_n(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\tau\\&-\frac{1}{R\pi}\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^{2\pi}[\exp(u(R,\phi,t))-1]\\&\cdot\exp(u(R,\phi,t))\cos n(\phi-\theta)\mathrm{d}\phi\\\equiv&\,\mathcal{K}_{\infty}^2(u,u_t).\end{aligned}\tag{8.2.30}$$

应用非线性边界条件 (8.2.30), 可将 K-P-Z 方程的初值问题 (8.2.2)~(8.2.4) 等价地简化为有界计算区域 $B_0^{d,R}\times[0,T]$ 上的初边值问题:

$$u_t = \Delta u + |\nabla u|^2 + f(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in B_0^{d,R} \times [0,T], \tag{8.2.31}$$

$$\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial r} = \mathcal{K}_\infty^2(u,u_t), \quad \forall\ t \in (0,T], \tag{8.2.32}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in B_0^{d,R}. \tag{8.2.33}$$

在准确人工边界条件 (8.2.30) 右端对无穷级数进行截断，选取前 N 项记其为 $\mathcal{K}_N^2(u,u_t)$，则由 (8.2.30) 得到二维 K-P-Z 方程的一系列近似非线性人工边界条件：

$$\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial r} = \mathcal{K}_N^2(u,u_t), \quad N = 0,1,2,\cdots. \tag{8.2.34}$$

应用近似非线性边界条件 (8.2.34), 可将 K-P-Z 方程的初值问题 (8.2.2)~(8.2.4) 近似地简化为有界计算区域 $B_0^{d,R} \times [0,T]$ 上的一系列近似初边值问题 ($N = 0,1,\cdots$)：

$$u_t = \Delta u + |\nabla u|^2 + f(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in B_0^{d,R} \times [0,T], \tag{8.2.35}$$

$$\frac{\partial u(R,\theta,t)}{\partial r} = \mathcal{K}_N^2(u,u_t), \quad \forall\ t \in (0,T], \tag{8.2.36}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in B_0^{d,R}. \tag{8.2.37}$$

在有界计算区域 $B_0^{d,R} \times [0,T]$ 上求出初边值问题 (8.2.31)~(8.2.33)(或者 (8.2.35)~(8.2.37)) 的数值解即可得到原问题的数值近似解。

8.2.3　K-P-Z 方程的非线性人工边界条件 ($d = 3$)

在 $d = 3$ 的情况，无界区域 Ω_e 是半径为 R 的球的外部。在论文 (Han and Yin, 2005) 中给出了三维热传导方程的人工边界条件，即问题 (8.2.10)~(8.2.12) 的解 $v(r,\phi,\theta,t)$ (在极坐标下) 在人工边界 Σ_R 上满足：

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(R,\theta,\phi,t)}{\partial r} =& -\frac{1}{4\pi R}\int_S v(R,\xi,\psi,t)\mathrm{d}S_{\xi,\psi} \\ &-\frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^t\int_S \frac{\partial v(R,\xi,\psi,\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau \\ &-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_S v(R,\xi,\psi,t)P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\right. \\ &+\frac{2n+1}{4\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_S \frac{\partial v(R,\xi,\psi,\tau)}{\partial \tau} \\ &\left.\cdot P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\frac{H_{n+\frac{1}{2}}(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau\right],\end{aligned} \tag{8.2.38}$$

其中，

$$\cos\gamma = \cos\xi\cos\theta + \sin\xi\sin\theta\cos(\psi-\phi), \tag{8.2.39}$$

$P_n(\,\bullet\,)$ 是 n 阶 Legendre 多项式，

$$H_{n+\frac{1}{2}}(t) = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi^3}R}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mu^2 t}}{J^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu R)+Y^2_{n+\frac{1}{2}}(\mu R)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}. \tag{8.2.40}$$

由非线性变换 (8.2.9) 和公式 (8.2.38) 立刻可得三维 K-P-Z 方程在人工边界 Σ_R 上的非线性人工边界条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(R,\theta,\phi,t)}{\partial r} =& -\frac{1}{4\pi R}\int_S\{\exp[u(R,\xi,\psi,t)]-1\}\\&\bullet\exp[u(R,\theta,\phi,t)]\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\\&-\frac{1}{4\pi^{3/2}}\int_0^t\int_S\frac{\partial}{\partial\tau}\{\exp[u(R,\xi,\psi,\tau)\\&-u(R,\theta,\phi,t)]\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau\\&-\sum_{n=1}^\infty\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{4\pi R}\int_S[\exp(u(R,\xi,\psi,t))-1]\right.\\&\bullet\exp[u(R,\theta,\phi,t)]P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\\&+\frac{2n+1}{4\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_S\frac{\partial}{\partial\tau}\exp[u(R,\xi,\psi,\tau)-u(R,\theta,\phi,t)]\\&\left.\bullet P_n(\cos\gamma)\mathrm{d}S_{\xi,\psi}\frac{H_{n+\frac{1}{2}}(t-\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau\right]\\\equiv&\,\mathcal{K}^3_\infty(u,u_t).\end{aligned} \tag{8.2.41}$$

应用非线性人工边界条件 (8.2.41)，K-P-Z 方程的初值问题 (8.2.2)~(8.2.4) 等价于下面有界计算区域 $B_0^{d,R}\times[0,T]$ 上的初边值问题：

$$u_t = \Delta u + |\nabla u|^2 + f(x,t), \quad \forall\ (x,t)\in B_0^{d,R}\times(0,T] \tag{8.2.42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R} = \mathcal{K}^3_\infty(u,u_t), \tag{8.2.43}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \forall\ |x|\leqslant R. \tag{8.2.44}$$

在等式 (8.2.41) 右端将无穷级数进行截断，仅选取前面的 N 项记其为 $\mathcal{K}^3_N(u,u_t)$，则我们得到一系列近似非线性人工边界条件 $(N=0,1,2,\cdots)$：

$$\frac{\partial u(R,\theta,\phi,t)}{\partial r} = \mathcal{K}^3_N(u,u_t), \quad N=0,1,2,\cdots. \tag{8.2.45}$$

应用近似的非线性人工边界条件 (8.2.45)，可将 K-P-Z 方程的初值问题 (8.2.2)~(8.2.4) 近似地简化为下面有界计算区域 $B_0^{d,R} \times [0,T]$ 上的一系列近似初边值问题：

$$u_t = \Delta u + |\nabla u|^2 + f(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in B_0^{d,R} \times (0,T] \tag{8.2.46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=R} = \mathcal{K}_N^3(u,u_t), \tag{8.2.47}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \forall\ |x| \leqslant R. \tag{8.2.48}$$

在论文 (Xu, Han and Wu, 2006) 中对上述问题进行差分离散化，得到了原始问题在有界计算区域上的数值近似解。

8.3　三次非线性 Schrödinger 方程

考虑下面三次非线性 Schrödinger 方程的初值问题：

$$\mathrm{i}\psi_t(x,t) + \psi_{xx}(x,t) - 2\rho|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = f(x,t), \\ \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,T], \tag{8.3.1}$$

$$\psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^1, \tag{8.3.2}$$

其中参数 $\rho = 1$ (对应 focusing) 或 $\rho = -1$ (对应 nonfocusing)；$f(x,t)$, $\psi_0(x)$ 是已知复值函数，并且假设其支集是紧的，即：

$$\mathrm{supp}\{f(x,t)\} \subset [-1,0] \times [0,T], \quad \mathrm{supp}\{\psi_0(x)\} \subset [-1,0].$$

引进人工边界：

$$\Sigma_0 = \{(x,t)| \quad x = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\},$$

$$\Sigma_{-1} = \{(x,t)| \quad x = -1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

8.3.1　人工边界 Σ_0 和 Σ_{-1} 上的非线性人工边界条件

下面分别在人工边界 Σ_0 和 Σ_{-1} 上找出问题 (8.3.1)~(8.3.2) 的解 $\psi(x,t)$ 满足的非线性人工边界条件。首先考虑 $\psi(x,t)$ 在区域 $[0,+\infty) \times [0,T]$ 上的限制，$\psi(x,t)$ 满足：

$$\mathrm{i}\psi_t(x,t) + \psi_{xx}(x,t) - 2\rho|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = 0, \\ \forall\ (x,t) \in [0,+\infty) \times (0,T], \tag{8.3.3}$$

$$\psi(0,t) \equiv g_0(t), \quad \forall\ t \in [0,T], \tag{8.3.4}$$

$$\psi(x,0) = 0, \quad \forall\ x \in [0,+\infty), \tag{8.3.5}$$

对于已知的 $g_0(t)(g_0(0)=0)$，在论文 (Boutet de Monvel, Fokas and Shepelsky, 2003) 中研究了问题 (8.3.3)~(8.3.5)，并且给出了 $g_1(t)\equiv\psi_x(0,t)$ 与 $g_0(t)$ 满足的关系式，即：

$$g_1(t)=g_0(t)M_2(t,t)+\frac{4\mathrm{i}}{\pi}\int_{\partial D}\left[2k^2\int_0^t \mathrm{e}^{4\mathrm{i}k^2(\tau-t)}M_1(t,2\tau-t)\mathrm{d}\tau-\frac{g_0(t)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{d}k, \quad (8.3.6)$$

其中函数 $M_j(t,s)$，$j=1,2$ 和下面公式中出现的函数 $L_j(t,s)$，$j=1,2$ 在区域 $\{t>0,\ -t<s<t\}$ 上满足微分方程：

$$L_{1t}-L_{1s}=\mathrm{i}g_1(t)L_2+\alpha(t)M_1+\beta(t)M_2, \quad (8.3.7)$$

$$L_{2t}+L_{2s}=-\mathrm{i}\rho\bar{g}_1(t)L_1-\alpha(t)M_2+\rho\bar{\beta}(t)M_1, \quad (8.3.8)$$

$$M_{1t}-M_{1s}=2g_0(t)L_2+\mathrm{i}g_1(t)M_2, \quad (8.3.9)$$

$$M_{2t}+M_{2s}=2\rho\bar{g}_0L_1-\mathrm{i}\rho\bar{g}_1(t)M_1, \quad (8.3.10)$$

和边界条件：

$$L_1(t,t)=\frac{\mathrm{i}}{2}g_1(t), \quad L_2(t,-t)=0, \quad (8.3.11)$$

$$M_1(t,t)=g_0(t), \quad M_2(t,-t)=0, \quad (8.3.12)$$

并且，

$$\alpha(t)=\frac{\rho}{2}(g_0\bar{g}_1-\bar{g}_0g_1), \quad \beta(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}g_0}{\mathrm{d}t}-\rho|g_0|^2g_0\right). \quad (8.3.13)$$

其中区域 D 表示复 k- 平面的第一象限，即：

$$D=\{k|k\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}k>0,\ \ \mathrm{Im}k>0\}.$$

∂D 表示 D 的边界，在积分 (8.3.6) 中的回路积分的路径是从 $+\mathrm{i}\infty$ 沿虚轴到坐标原点，再沿实轴到 $+\infty$。对于已知的 $g_0(t)$，$g_1(t)$ 通过求解微分方程的边值问题 (8.3.7)~(8.3.13) 可得函数 $M_1(t,s)$，$M_2(t,s)$，然后得到公式 (8.3.6) 的右端。将 (8.3.6) 右端记为 $\mathcal{K}_0(g_0,g_1)$，则等式 (8.3.6) 可简记为：

$$g_1(t)=\mathcal{K}_0(g_0,g_1). \quad (8.3.14)$$

等式 (8.3.14) 是三次非线性 Schrödinger 方程初值问题 (8.3.1)~(8.3.2) 的解 $\psi(x,t)$ 在人工边界 Σ_0 上满足的准确非线性边界条件。

完全类似地在人工边界 Σ_{-1} 上，令：

$$h_0(t) = \psi(-1,t),$$
$$h_1(t) = \psi_x(-1,t),$$

则可得到三次非线性 Schrödinger 方程初值问题 (8.3.1)~(8.3.2) 的解 $\psi(x,t)$ 在人工边界 Σ_{-1} 上满足的准确非线性边界条件：

$$h_1(t) = -\mathcal{K}_0(h_0(t), -h_1(t)). \tag{8.3.15}$$

8.3.2　有界区域 $[-1,0]\times[0,T]$ 上的等价初边值问题

Zheng C.X.(2006-A) 应用非线性人工边界条件 (8.3.14)~(8.3.15) 将无界区域 $\mathbb{R}^1\times[0,T]$ 上的初值问题 (8.3.1)~(8.3.2) 等价的简化为有界计算区域 $[-1,0]\times[0,T]$ 上三次非线性 Schrödinger 方程的初边值问题：

$$\mathrm{i}\psi_t(x,t) + \psi_{xx}(x,t) - 2\rho|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) = f(x,t),$$
$$\forall (x,t)\in(-1,0)\times(0,T], \tag{8.3.16}$$

$$g_1(t) = \mathcal{K}_0(g_0, g_1), \quad \forall\ t\in(0,T], \tag{8.3.17}$$

$$h_1(t) = -\mathcal{K}_0(h_0, -h_1), \quad \forall\ t\in(0,T]. \tag{8.3.18}$$

$$\psi(x,0) = \psi_0(x), \quad \forall\ x\in[-1,0], \tag{8.3.19}$$

为了计算初边值问题 (8.3.16)~(8.3.19) 的数值解，Zheng C.X.(2006-A) 将非线性人工边界条件 (8.3.17)~((8.3.18)) 改写为较简单的形式。记：

$$f(\tau) \equiv M_1(t, 2\tau - t),$$
$$I \equiv \int_{\partial D}\left[2k^2\int_0^t \mathrm{e}^{4\mathrm{i}k^2(\tau-t)} f(\tau)d\tau - \frac{M_1(t,t)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{d}k.$$

由方程 (8.3.9) 和边界条件 (8.3.12) 可得：

$$f(0) = M_1(t,-t) = 0,$$

应用等式

$$\int_{\partial D}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^2}}{k^2}\mathrm{d}k = 2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

和分部积分，我们得到：

$$\begin{aligned}I &= \int_{\partial D}\left[2k^2\int_0^t \mathrm{e}^{4\mathrm{i}k^2(\tau-t)} f(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{M_1(t,t)}{2\mathrm{i}}\right]\mathrm{d}k\\ &= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\partial D}\int_0^t f'(\tau)\mathrm{e}^{4\mathrm{i}k^2(\tau-t)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}k\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\partial D}\int_0^t f'(\tau)\left(\mathrm{d}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}k^2(\tau-t)}-1}{4\mathrm{i}k^2}\right)\mathrm{d}k\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\partial D}\left[\frac{f'(0)(1-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}k^2t})}{4\mathrm{i}k^2}+\int_0^t\frac{1-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}k^2(t-\tau)}}{4\mathrm{i}k^2}f''(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}k\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{f'(0)}{4\mathrm{i}}\sqrt{4t}+\int_0^t\frac{\sqrt{4(t-\tau)}}{4\mathrm{i}}f''(\tau)d\tau\right]2\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^t\frac{f'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
\tag{8.3.20}
$$

将表达式 (8.3.20) 代入非线性边界条件 (8.3.6) 可得非线性边界条件 (8.3.17) 的等价形式：

$$
g_1(t)=g_0(t)M_2(t,t)-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\partial_\tau M_1(t,2\tau-t)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau. \tag{8.3.21}
$$

在非线性人工边界条件 (8.3.21) 中函数 $M_1(t,s)$，$M_2(t,s)$ 是未知的，它需要与函数 $L_1(t,s)$，$L_2(t,s)$ 同时通过求解微分方程的边值问题 (8.3.7)～ (8.3.13) 得到。完全类似地可以得到 $h_1(t)$ 和 $h_0(t)$ 在 Σ_{-1} 上满足的与非线性边界条件 (8.3.18) 等价的边界条件。在论文 (Zheng, 2006-A) 中给出了有界计算区域上初边值问题 (8.3.16)～(8.3.19) 的差分近似解。

进一步 Zheng (Zheng, 2006-B; Zheng, 2007) 对一维 KDV 方程，一维 sine-Gordon 方程等非线性方程得到了准确的人工边界条件。

8.4 构造近似非线性人工边界条件的算子分裂方法

考虑下面一般非线性 Schrödinger 方程初值问题的数值解：

$$
\mathrm{i}\psi_t(x,t)+\psi_{xx}(x,t)-g(|\psi(x,t)|^2)\psi(x,t)-V\psi(x,t)=0,\quad \forall\ (x,t)\in\mathbb{R}^1\times(0,T], \tag{8.4.1}
$$

$$
\psi(x,0)=\psi_0(x),\qquad \forall\ x\in\mathbb{R}^1, \tag{8.4.2}
$$

其中 V 是已知的常数，$g(\xi)$ 是已知实值函数，特别地当 $V=0$，$g(\xi)=\rho\xi$ 时，问题 (8.4.1) ～ (8.4.2) 简化为在 8.3 节中讨论的三次非线性 Schrödinger 方程 ($\rho=1$ (对应 focusing) 或 $\rho=-1$ (对应 nonfocusing))；$\psi_0(x)$ 是已知复值函数，并且假设其支集是紧的，即：

$$
\mathrm{supp}\{\psi_0(x)\}\subset[-1,0].
$$

引进人工边界:

$$\Sigma_0 = \{(x,t)|\quad x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\},$$
$$\Sigma_{-1} = \{(x,t)|\quad x=-1, 0\leqslant t\leqslant T\}.$$

如果我们能够在人工边界 Σ_0, Σ_{-1} 上找到问题的准确 (或近似) 的吸收人工边界条件, 则可将问题简化到有界计算区域 $D_i=\{(x,t)|\ -1<x<0, 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上进行数值求解。显然 8.3 节中针对三次非线性 Schrödinger 方程给出的方法不能应用于问题 (8.4.1)~(8.4.2)。Xu Z. L. 和 Han H. D. (2006) 提出了构造非线性发展方程的近似非线性吸收边界条件的 SLAB (Split Local Absorbing boundary) 方法，即将算子分裂方法与线性问题的局部吸收条件相结合去构造一般非线性 Schrödinger 方程初值问题 (8.4.1)~(8.4.2) 的近似非线性人工边界条件，从而可以近似地将问题 (8.4.1)~(8.4.2) 简化到有界计算区域上进行数值求解。本节的主要内容来源于论文 (Xu and Han, 2006)。

首先将时间离散化, 取 $\Delta t=\dfrac{T}{N}$, N 是一个正整数。令:

$$t_n = n\Delta t,\qquad n=0,1,\cdots,N.$$

在每个时间区间 $[t_n,\ t_{n+1}]$, $(n=0,1,\cdots,N-1)$ 上求解问题:

$$\mathrm{i}\psi_t(x,t)+\psi_{xx}(x,t)-g(|\psi(x,t)|^2)\psi(x,t)-V\psi(x,t)=0,\qquad \forall\ (x,t)\in\mathbb{R}^1\times(t_n,t_{n+1}],\tag{8.4.3}$$

$$\psi(x,t_n)=\psi(x,t_n),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^1,\tag{8.4.4}$$

其中 $\psi(x,0)=\psi_0(x)$。进一步应用算子分裂方法将问题 (8.4.3)~(8.4.4) 近似地分解为下面两个问题，进行连续求解。

$$\mathrm{i}\psi_t^*(x,t)+\psi_{xx}^*(x,t)-V\psi^*(x,t)=0,\qquad \forall\ (x,t)\in\mathbb{R}^1\times(t_n,t_{n+1}],\tag{8.4.5}$$

$$\psi^*(x,t_n)=\psi(x,t_n),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^1,\tag{8.4.6}$$

$$\mathrm{i}\psi_t(x,t)-g(|\psi(x,t)|^2)\psi(x,t)=0,\qquad \forall\ (x,t)\in\mathbb{R}^1\times(t_n,t_{n+1}],\tag{8.4.7}$$

$$\psi(x,t_n)=\psi^*(x,t_{n+1}),\quad \forall\ x\in\mathbb{R}^1,\tag{8.4.8}$$

问题 (8.4.7)~(8.4.8) 是一阶非线性常微分方程的初值问题，对于任意 $x \in [-1, 0]$，可由初值 $\psi^*(x, t_{n+1})$ 求得在 (x, t_{n+1}) 的值 $\psi(x, t_{n+1})$。在人工边界 Σ_0，Σ_{-1} 上不需要其他任何边界条件。问题 (8.4.5)~(8.4.6) 是线性 Schrödinger 方程的初值问题。为了在有界计算区域 $[-1,0] \times (t_n, t_{n+1}]$ 上求解问题 (8.4.5)~(8.4.6)，我们必须研究线性 Schrödinger 方程在人工边界 Σ_0，Σ_{-1} 上的局部吸收人工边界条件。

8.4.1 线性 Schrödinger 方程的局部吸收人工边界条件

考虑线性 Schrödinger 方程 (8.4.5) 具有下面形式的解：

$$\psi(x,t) = \exp \mathrm{i}(kx - \omega t), \tag{8.4.9}$$

对应的色散关系为：

$$k^2 = \omega - V,$$

即：

$$k = \pm\sqrt{\omega - V}. \tag{8.4.10}$$

在公式 (8.4.10) 中取正号表示波向 x 轴的正方向转播，取负号表示波向 x 轴的负方向转播。应用多项式逼近或者有理逼近对 (8.4.10) 右端的函数 $\sqrt{\omega - V}$ 逼近，可得到线性 Schrödinger 方程 (8.4.5) 在人工边界 Σ_0 (在公式 (8.4.10) 中取正号)，Σ_{-1} (在公式 (8.4.10) 中取负号) 上的局部吸收人工边界条件。例如在 $\omega = \omega_0$ 给出函数 $\sqrt{\omega - V}$ 的一个二阶精度的 (1, 1) Pade 逼近：

$$k = \pm k_0 \frac{1+3z}{3+z},$$

其中 $z = \dfrac{\omega - V}{k_0^2}$，并且 $\omega_0 = k_0^2 + V$，$k_0 > 0$ 为一个选定的参考波数。由此在人工边界 Σ_0(取正号)，Σ_{-1}(取负号) 上得到近似的色散关系：

$$(3k_0^2 - V)k + \omega k = \pm k_0(k_0^2 - 3V) \pm 3k_0\omega. \tag{8.4.11}$$

近似色散关系 (8.4.11) 对应于微分方程：

$$\psi_{xt} - \mathrm{i}(3k_0^2 - V)\psi_x = \pm k_0(k_0^2 - 3V)\psi \pm \mathrm{i}3k_0\psi_t. \tag{8.4.12}$$

应用线性 Schrödinger 方程 (8.4.5) 可得：

$$\psi_{xt} = \mathrm{i}\psi_{xxx} - \mathrm{i}V\psi_x. \tag{8.4.13}$$

将方程 (8.4.5), (8.4.13) 代入 (8.4.12) 消去导数 ψ_t, ψ_{xt} 可得：

$$\psi_{xxx} - 3k_0^2\psi \pm \{-3\mathrm{i}k_0\psi_{xx} + \mathrm{i}k_0^3\psi\} = 0. \tag{8.4.14}$$

等式 (8.4.14) 就是论文 (Fevens and Jiang, 1999) 中给出的近似吸收边界条件。下面我们应用算子分裂法和线性 Schrödinger 方程的近似吸收边界条件 (8.4.12) 将原问题 (8.4.1) ~ (8.4.2) 化简到有界区域上进行数值计算。

8.4.2　有界计算区域上的差分近似

考虑问题 (8.4.1)~(8.4.2) 在有界计算区域 $[-1,0]\times[0,T]$ 上的差分近似。取空间步长 $\Delta x = 1/J$, J 是一个正整数。记：

$$x_j = j\Delta x, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

以 ψ_j^n 表示波函数 $\psi(x,t)$ 在点 (x_j, t_n) 的近似值。已知 $\{\psi_j^n,\ j=-J,-(J-1),\cdots,0\}$，下面给出求解 $\{\psi_j^{n+1},\ j=-J,-(J-1),\cdots,0\}$ 的差分方程。在点 $(x_j,t_{n+1})(j=-(J-1),\cdots,-1)$ 上直接对原方程 (8.4.1) 进行差分离散化可得：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\frac{\psi_j^{n+1}-\psi_j^n}{\Delta t} + \left(\frac{\psi_{j+1}^{n+1}-2\psi_j^{n+1}+\psi_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{\psi_{j+1}^{n}-2\psi_j^{n}+\psi_{j-1}^{n}}{2\Delta x^2}\right)\\
&-\left\{g\left(\left|\frac{\psi_j^{n+1}+\psi_j^n}{2}\right|^2\right)+V\right\}\frac{\psi_j^{n+1}+\psi_j^n}{2} = 0,\\
&j=-(J-1),\cdots,-1; \qquad n=0,1,\cdots,N-1.
\end{aligned} \tag{8.4.15}$$

在每个时间步我们需要求出 $J+1$ 个未知量 $\psi_j^{n+1}(j=-J,-(J-1),\cdots,0)$，但是 (8.4.15) 中只有 $J-1$ 个方程。下面分别在人工边界 Σ_0 和 Σ_{-1} 附近应用算子分裂法和近似的吸收人工边界条件补充上缺少的方程。在人工边界 Σ_0 和 Σ_{-1} 附近分别取三个节点 $(x_{s-1},t_n),(x_s,t_n),(x_{s+1},t_n)$，其中 $s=-1$ 或者 $s=-(J-1)$。已知 $\psi_{s+\alpha}^n(s=-1,-(J-1),\alpha=-1,0,1)$，第一步对线性问题的局部吸收人工边界条件 (8.4.12) 进行离散化可得 $(s=-1,-(J-1))$：

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{i}(3k_0^2-V)\left(\frac{\psi_{s+1}^*-\psi_{s-1}^*}{4\Delta x}+\frac{\psi_{s+1}^n-\psi_{s-1}^n}{4\Delta x}\right)\\
&+\frac{1}{2\Delta x\Delta t}(\psi_{s+1}^*-\psi_{s-1}^*-\psi_{s+1}^n+\psi_{s-1}^n)\\
&=\pm k_0(k_0^2-3V)\frac{\psi_s^*+\psi_s^n}{2}\pm 3\mathrm{i}k_0\frac{\psi_s^*-\psi_s^n}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{8.4.16}$$

在上述方程中当 $s=-1$ 时取正号，$s=-(J-1)$ 时取负号。在方程 (8.4.16) 中我们引进了六个中间值 $\{\psi_{s+\alpha}^*(s=-1,-(j-1);\alpha=-1,0,1)\}$，即我们又引进

六个新的未知量。第二步以 $\{\psi^*_{s+\alpha}(s=-1,-(j-1);\alpha=-1,0,1)\}$ 为初值求解非线性常微分方程 (8.4.7) 可得：

$$\psi^{n+1}_{s+\alpha}=\exp\{-\mathrm{i}g(|\psi^*_{s+\alpha}|^2)\Delta t\}\psi^*_{s+\alpha},\qquad s=0,-J;\alpha=-1,0,1. \tag{8.4.17}$$

综合方程 (8.4.15) ~ (8.4.17)，我们得到由 $J+7$ 个方程组成的包含 $J+7$ 个未知量 $\{\psi_j^{n+1},\ j=-J,-(J-1),\cdots,0;\ \psi^*_{s+\alpha},\ s=-1,-(J-1),\ \alpha=-1,0,1\}$ 的非线性代数方程组。数值求解非线性代数方程组 (8.4.15) ~ (8.4.17)，可得 $\{\psi_j^{n+1},\ j=-J,-(J-1),\cdots,0\}$。这样我们就实现了在有界计算区域 $D_i=\{(x,t)|\ -1\leqslant x\leqslant 0,\ \ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上数值求解原问题 (8.4.1) ~ (8.4.2) 的目标。在论文 (Xu and Han, 2006) 中给出的数值例子说明用算子分裂与线性问题局部吸收边界条件相结合的方法为一般非线性 Schrödinger 方程构造出的非线性吸收边界条件是十分有效的。在另一论文 (Xu, Han and Wu, 2007) 中，这一方法已被应用于多维非线性 Schrödinger 方程。

在实际计算中, 还存在如何选取参考波数 k_0 的问题。在论文 (Fevens and Jiang, 1999) 和 (Xu, Han and Wu, 2007) 中分别讨论了解决这个问题的方法。

本章内容的主要参考文献为：Han, Wu and Xu (2006)；Xu, Han and Wu (2006)；Zheng (2006-A)；Xu, Han and Wu (2007)。其他的相关工作可参阅 Zheng (2006-B, 2007)；Szeftel (2006-A, 2006-B)；Fevens and Jiang (1999)；Han, Huang and Yin (2008)。

第 9 章　对带奇性问题的应用

在许多实际问题中，经常需要求解具有奇性解的偏微分方程。例如在线性断裂力学理论中 (Anderson, 1995)，需要研究带裂纹的弹性体在各种载荷条件下的应力分析。在裂纹的顶点一般情况下会产生应力集中的现象，因而在裂纹的顶点应力是无界的，即我们所研究的线性弹性方程组的边值问题的解带有奇性。问题的解的奇性给这类问题的数值求解带来了挑战性的困难，克服困难的一个办法就是应用人工边界方法。在这一章中我们讨论人工边界方法对带奇性问题的应用。

9.1　带有奇性的修正 Helmholtz 方程

在这一节中我们讨论有界区域上的修正 Helmholtz 方程的数值解。当所考虑的区域带有角点时， 此方程的解可能带有奇性。在另外一种情形：当边界条件由一种转为另外一种时，例如 Dirichlet 边界条件在某一点转为 Neumann 边界条件时，方程的解也可能在这一点具有奇性。假设 $\Omega \subset R^2$ 是一有界区域 (如图 9-1 所示)，其边界为 $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$。假设在 Γ_D 和 Γ_N 上分别给出 Dirichlet 和 Neumann 边界条件，我们考虑下面的问题：

$$-\Delta u + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{9.1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \tag{9.1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h \quad \text{on } \Gamma_N, \tag{9.1.3}$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\Gamma_N)$，a_0 是一个非负实数。令：

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_D \right\}.$$

则问题 (9.1.1)~(9.1.3) 的变分形式为：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in V, \text{ 使} \\ \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \nabla v + a_0 uv)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega fv\, \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} hv\, \mathrm{d}s, \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{9.1.4}$$

一般地说，变分问题 (9.1.4) 的解 $u \in H^1(\Omega)$，但是 $u \notin H^k(\Omega)(k \geqslant 2)$。因此，标准有限元方法不能给出变分问题 (9.1.4) 满意的数值结果，尤其是在奇点附近。

下面我们介绍如何应用人工边界方法来提高数值解的精度。

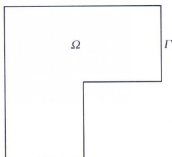
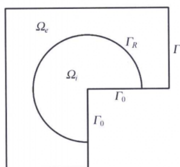


图 9-1 区域 Ω

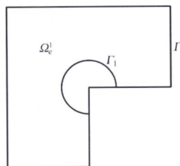
9.1.1 在奇点附近的人工边界条件

首先在区域 Ω 中引进人工边界 $\Gamma_R = \{x|\ x \in \Omega, |x| = R\}$，$\Gamma_R$ 将 Ω 分割为两部分 (如图 9-2(a) 所示)：

$$\Omega_i = \{x \mid x \in \Omega,\ |x| < R\},$$
$$\Omega_e = \{x \mid x \in \Omega,\ |x| > R\}.$$



(a) 区域 Ω_i 和 Ω_e



(b) 人工边界 Γ_1 和区域 Ω_e^1

图 9-2

假设在 Ω_i 中 $f = 0$。在极坐标下, 原问题 (9.1.1)~(9.1.3) 的解在区域 Ω_i 上的限制满足：

$$-\Delta u + a_0 u = 0 \quad \text{in } \Omega_i, \tag{9.1.5}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \tag{9.1.6}$$

$$u = u(R, \theta) \equiv u_R(\theta), \quad \text{on } \Gamma_R. \tag{9.1.7}$$

问题 (9.1.5)~(9.1.7) 的解有下面的展开式：

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n g_n(r)\sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right), \tag{9.1.8}$$

其中 $\omega\pi$ 是奇点的内角，

$$\begin{aligned}&g_n(r)=r^{n/\omega}, \quad a_0=0\\&g_n(r)=I_{n/\omega}(a_0 r)=\left(\frac{a_0 r}{2}\right)^{n/\omega}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a_0 r)^{2i}}{4^i i!\Gamma(i+1+n/\omega)}, \quad a_0>0.\end{aligned}$$

当 $a_0>0$ 时，$I_{n/\omega}(a_0 r)$ 是修正的第一类 Bessel 函数，其阶为 n/ω。由 (9.1.7) 我们得到系数 $b_n,\ n=1,2,\cdots$ 的表达式：

$$b_n=\frac{2}{\pi\omega g_n(R)}\int_0^{\omega\pi}u_R(\phi)\sin\left(\frac{n\phi}{\omega}\right)\mathrm{d}\phi,$$

其中 R 是圆弧 Γ_R 的半径。因此我们得到问题 (9.1.5)~(9.1.7) 的解：

$$\begin{aligned}u(r,\theta)=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2g_n(r)}{\pi\omega g_n(R)}\sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right)\int_0^{\omega\pi}u_R(\phi)\sin\left(\frac{n\phi}{\omega}\right)\mathrm{d}\phi\\\equiv& H(u_R,r,\theta).\end{aligned} \tag{9.1.9}$$

限制在 Γ_R 上我们得到：

$$u(R,\theta)=H(u_R,R,\theta). \tag{9.1.10}$$

等式 (9.1.10) 即为问题 (9.1.1)~(9.1.3) 的解 u 在圆弧 Γ_R 上所满足的条件。

9.1.2　基于人工边界条件的迭代法

利用等式 (9.1.9)，我们可以构造一个求解问题 (9.1.1)~(9.1.3) 的迭代法。为简单起见，我们假设问题 (9.1.1)~(9.1.3) 只有一个在原点的奇点 (图 9-1) 并且 $\Gamma_N=\emptyset$。再引进人工边界 Γ_1，如图 9-2(b) 所示。Γ_1 是以 R_1 为半径的圆弧，使得 $0<R_1<R$。令：

$$\Omega_e^1=\{x\mid x\in\Omega,\ |x|>R_1\}.$$

假设 f 的支集包含在 Ω_e 中，且在 Γ_0 上 $u=0$。由等式 (9.1.9) 可得问题 (9.1.1)~(9.1.3) 的解 u 在 Γ_1 上的限制：

$$u(R_1,\theta)=H(u_R,R_1,\theta).$$

因此限制在 Ω_e 上问题 (9.1.1)~(9.1.3) 等价于下面的问题：

$$-\Delta u + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega_e^1, \tag{9.1.11}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \cup \Gamma, \tag{9.1.12}$$

$$u = H(u_R, R_1, \theta) \quad \text{on } \Gamma_1. \tag{9.1.13}$$

由于 u_R 是未知的，我们构造下面的迭代法来求解问题 (9.1.11)~(9.1.13)：

$$-\Delta u^{(k)} + a_0 u^{(k)} = f \quad \text{in } \Omega_e^1, \tag{9.1.14}$$

$$u^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \cup \Gamma, \tag{9.1.15}$$

$$u^{(k)} = H(u_R^{(k-1)}, R_1, \theta) \quad \text{on } \Gamma_1, \tag{9.1.16}$$

其中 $u_R^{(k-1)} = u^{(k-1)}(R, \theta)$。令：

$$V_1 = \left\{ v \in H^1(\Omega_e^1) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_0 \cup \Gamma \cup \Gamma_1 \right\},$$

$$V_1^{(k)} = \left\{ v \in H^1(\Omega_e^1) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_0 \cup \Gamma, v = H(u_R^{(k-1)}, R_1, \theta) \text{ on } \Gamma_1 \right\},$$

问题 (9.1.14)~(9.1.16) 的变分形式为：

$$\begin{cases} \text{给定 } u_R^{(k-1)}, \text{ 找 } u^{(k)} \in V_1^{(k)}, \text{ 使} \\ a_1(u^{(k)}, v) = (f, v), \qquad \forall v \in V_1, \end{cases} \tag{9.1.17}$$

其中，

$$a_1(u, v) = \int_{\Omega_e} (\nabla u \nabla v + a_0 u v) \mathrm{d}x, \qquad (f, v) = \int_{\Omega_e} f v \, \mathrm{d}x.$$

不难看出上述的迭代法实际上等价于下面的 Schwarz 交替迭代法：

$$-\Delta u_1^{(k)} + a_0 u_1^{(k)} = f \quad \text{in } \Omega_e, \tag{9.1.18}$$

$$u_1^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \cup \Gamma, \tag{9.1.19}$$

$$u_1^{(k)} = u_2^{(k-1)} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{9.1.20}$$

及

$$-\Delta u_2^{(k)} + a_0 u_2^{(k)} = f \quad \text{in } \Omega_i, \tag{9.1.21}$$

$$u_2^{(k)} = 0 \quad \text{on } \Gamma_0, \tag{9.1.22}$$

$$u_2^{(k)} = u_1^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_R, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{9.1.23}$$

对于问题 (9.1.18), (9.1.20) 的解 $u_1^{(k)} \in H^1(\Omega_e)$，令：

$$u_1^{(k)}(x) = \begin{cases} u_1^{(k)}(x), & x \in \Omega_e, \\ u_2^{(k-1)}(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_e, \end{cases}$$

这样我们就将 $u_1^{(k)}$ 延拓到区域 Ω 上，并且 $u_1^{(k)} \in V$。对于问题 (9.1.21)~(9.1.23) 的解 $u_2^{(k)} \in H^1(\Omega_i)$，令：

$$u_2^{(k)}(x) = \begin{cases} u_2^{(k)}(x), & x \in \Omega_i, \\ u_1^{(k)}(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases}$$

我们将 $u_2^{(k)}$ 延拓到区域 Ω 上，并且 $u_2^{(k)} \in V$。令：

$$V_2 = \left\{ v \in H^1(\Omega_i) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_R \cup \Gamma_0 \right\},$$

则：

$$u_1^{(k)} - u_2^{(k-1)} \in V_1, \quad u_2^{(k)} - u_1^{(k)} \in V_2.$$

定义双线性形式

$$a_2(u,v) = \int_{\Omega_i} (\nabla u \nabla v + a_0 uv) \mathrm{d}x,$$

则问题 (9.1.18)~(9.1.20) 和问题 (9.1.21)~(9.1.23) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u_1^{(k)} \text{ 使 } u_1^{(k)} - u_2^{(k-1)} \in V_1 \text{ 及} \\ a_1(u_1^{(k)} - u, v_1) = 0, \quad \forall v_1 \in V_1, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \text{找 } u_2^{(k)} \text{ 使 } u_2^{(k)} - u_1^{(k)} \in V_2 \text{ 及} \\ a_2(u_2^{(k)} - u, v_2) = 0, \quad \forall v_2 \in V_2, \end{cases}$$

其中 u 是问题 (9.1.1)~(9.1.3) 的解。用 $P_{V_i} : V \to V_i, i = 1,2,$ 表示由内积空间 V 到内积空间 V_i 的投影算子，则由 (9.1.24) 和 (9.1.24) 得到：

$$\begin{cases} \text{找 } u_1^{(k)} \text{ 使 } u_1^{(k)} - u_2^{(k-1)} \in V_1 \text{ 及} \\ a_1(u_1^{(k)} - u_2^{(k-1)}, v_1) = a_1(u - u_2^{(k-1)}, v_1), \quad \forall v_1 \in V_1, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \text{找 } u_2^{(k)} \text{ 使 } u_2^{(k)} - u_1^{(k)} \in V_2 \text{ 及} \\ a_2(u_2^{(k)} - u_1^{(k)}, v_2) = a_2(u - u_1^{(k)}, v_2), \quad \forall v_2 \in V_2. \end{cases}$$

显然我们有：

$$u_1^{(k)} - u_2^{(k-1)} = P_{V_1}(u - u_2^{(k-1)}), \tag{9.1.24}$$

$$u_2^{(k)} - u_1^{(k)} = P_{V_2}(u - u_1^{(k)}), \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{9.1.25}$$

由于 $u - u_2^{(k-1)} = u - u_1^{(k)} + u_1^{(k)} - u_2^{(k-1)}$ 及 $u_1^{(k)} - u_2^{(k-1)} \in V_1$，我们有 $u - u_1^{(k)} \in V_1^{\perp}$。类似地，$u - u_2^{(k)} \in V_2^{\perp}$，其中 $V_i^{\perp}$ 是 V_i 在 V 中的直交补。因此 (9.1.24) 和 (9.1.25) 等价于：

$$u - u_1^{(k)} = P_{V_1^{\perp}}(u - u_2^{(k-1)}), \tag{9.1.26}$$

$$u - u_2^{(k)} = P_{V_2^{\perp}}(u - u_1^{(k)}), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{9.1.27}$$

令：

$$e_i^{(k)} = u - u_i^{(k)}, \quad i = 1, 2$$

则 (9.1.26) 和 (9.1.27) 为：

$$e_1^{(k)} = P_{V_1^{\perp}} e_2^{(k-1)}, \tag{9.1.28}$$

$$e_2^{(k)} = P_{V_2^{\perp}} e_1^{(k)}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{9.1.29}$$

因此我们有：

$$e_1^{(k+1)} = P_{V_1^{\perp}} P_{V_2^{\perp}} e_1^{(k)}, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{9.1.30}$$

$$e_2^{(k+1)} = P_{V_2^{\perp}} P_{V_1^{\perp}} e_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{9.1.31}$$

由 (9.1.28) 和 (9.1.29) 可知若 $\{e_i^{(k)}\}, i = 1, 2$, 收敛，则其极限属于 $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$。类似于 Lions (1988) 和 Yu (1994-A) 中的证明，我们可以得到：

定理 9.1.1　$\lim\limits_{k\to\infty} \left\| e_i^{(k)} \right\|_1 = 0$，$i = 1, 2$. ■

定理 9.1.2　存在常数 α, $0 \leqslant \alpha < 1$，使得：

$$\left\| e_1^{(k)} \right\|_1 \leqslant \alpha^{k-1} \left\| e_1^{(1)} \right\|_1, \qquad \left\| e_2^{(k)} \right\|_1 \leqslant \alpha^{k} \left\| e_2^{(0)} \right\|_1. \qquad \blacksquare$$

定理 9.1.1 和定理 9.1.2 显示上述的 Schwarz 交替迭代法几何收敛。一般地说，在上述几何收敛阶估计中的常数 α 不容易确定。然而，当 Γ 是一圆弧时，我们可以得出 α。考虑区域 Ω_e 由 $R_1 \leqslant r \leqslant R_2, 0 \leqslant \theta \leqslant \omega\pi$ 给出，其中 R_2 是 Γ 的半径。假设在 Γ_1 上

$$e_2^{(0)}(R_1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right)$$

给定，且在 Γ 上 $e_1^{(1)}(R_2,\theta)=0$，则由分离变量法可以得到 $e_1^{(1)}(r,\theta)$ 在 Ω_e 中的表达式：

$$e_1^{(1)}(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{n/\omega}+B_n r^{-n/\omega}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right),$$

其中，

$$A_n=\frac{a_n R_1^{n/\omega}}{R_1^{2n/\omega}-R_2^{2n/\omega}},\quad B_n=\frac{-a_n R_1^{n/\omega}R_2^{2n/\omega}}{R_1^{2n/\omega}-R_2^{2n/\omega}}.$$

限制在 Γ_R 我们得到：

$$e_1^{(1)}(R,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n R^{n/\omega}+B_n R^{-n/\omega}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right).$$

由 (9.1.8) 我们得到：

$$e_2^{(1)}(R_1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n R_1^{n/\omega}\sin\left(\frac{n\theta}{\omega}\right),$$

其中，

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\omega\pi R^{n/\omega}}\int_0^{\omega\pi}e_1^{(1)}(R,\phi)\sin\left(\frac{n\phi}{\omega}\right)\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{R^{n/\omega}}\left(A_n R^{n/\omega}+B_n R^{-n/\omega}\right)=\frac{a_n R_1^{n/\omega}\left(R^{2n/\omega}-R_2^{2n/\omega}\right)}{R^{2n/\omega}\left(R_1^{2n/\omega}-R_2^{2n/\omega}\right)}.\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}\left\|e_2^{(1)}\right\|_{1/2,\Gamma_1}^2&=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)^{1/2}\left|b_n R_1^{n/\omega}\right|^2\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)^{1/2}\left|a_n\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n/\omega}\frac{R^{2n/\omega}-R_2^{2n/\omega}}{R_1^{2n/\omega}-R_2^{2n/\omega}}\right|^2\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)^{1/2}\left|a_n\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n/\omega}\right|^2\\&\leqslant\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2/\omega}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)^{1/2}|a_n|^2=\left(\frac{R_1}{R}\right)^{2/\omega}\left\|e_2^{(0)}\right\|_{1/2,\Gamma_1}^2\end{aligned}$$

类似地我们得到：

$$\left\|e_1^{(2)}\right\|_{1/2,\Gamma_R}^2\leqslant\left(\frac{R}{R_2}\right)^{2/\omega}\left\|e_1^{(1)}\right\|_{1/2,\Gamma_R}^2.$$

因此我们有：

$$\left\|e_2^{(k)}\right\|_{1/2,\Gamma_1} \leqslant \left(\frac{R_1}{R}\right)^{k/\omega} \left\|e_2^{(0)}\right\|_{1/2,\Gamma_1},$$

$$\left\|e_1^{(k)}\right\|_{1/2,\Gamma_R} \leqslant \left(\frac{R}{R_2}\right)^{(k-1)/\omega} \left\|e_1^{(1)}\right\|_{1/2,\Gamma_R}.$$

最后，由迹定理我们得到：

$$\left\|e_2^{(k)}\right\|_{1,\Omega_i} \leqslant C\left(\frac{R_1}{R}\right)^{k/\omega}, \quad \left\|e_1^{(k)}\right\|_{1,\Omega_e} \leqslant C\left(\frac{R}{R_2}\right)^{(k-1)/\omega}.$$

由此可见迭代法的收敛阶依赖于人工边界 Γ_R，Γ_1 和 Γ_2 的半径之比。令 $R = \sqrt{R_1R_2}$, 则有：

$$\left\|e_2^{(k)}\right\|_{1,\Omega_i} \leqslant C\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{k/2\omega}, \quad \left\|e_1^{(k)}\right\|_{1,\Omega_e} \leqslant C\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{(k-1)/2\omega}.$$

9.2　带有奇性的交界面问题

当偏微分方程的系数出现间断时，其解可能带有奇性，交界面问题是一个典型的例子。假设 Ω 是平面上的一个以 Γ 为边界的有界区域 (见图 9-3)，在极坐标下我们考虑下面的交界面问题：

$$-\nabla(p\nabla u) = f \qquad \text{in } \Omega, \tag{9.2.1}$$

$$u = g \qquad \text{on } \Gamma, \tag{9.2.2}$$

$$u(r,\phi_k - 0) = u(r,\phi_k + 0), \qquad 1 \leqslant k \leqslant M, \tag{9.2.3}$$

$$p_{k-1}\frac{\partial u}{\partial n}(r,\phi_k - 0) = p_k\frac{\partial u}{\partial n}(r,\phi_k + 0), \qquad 1 \leqslant k \leqslant M, \tag{9.2.4}$$

其中直线 $\theta = \phi_k, k = 1,2,\cdots,M$ 是交界面，这些交界面将 Ω 分为子区域 $\Omega_1,\cdots,\Omega_M$，系数 p 是分片正常数，即在 Ω_k 中 $p = p_k, k = 1,2,\cdots,M (p_0 = p_M)$，$f$ 和 g 是 Ω 和 Γ 上的给定函数。

引进集合和空间：

$$H_g^1(\Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega), v|_\Gamma = g\},$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega), v|_\Gamma = 0\}.$$

则边值问题 (9.2.1)~(9.2.4) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u \in H_g^1(\Omega), \text{ 使} \\ a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{9.2.5}$$

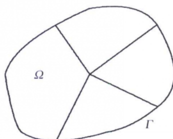


图 9-3　区域 Ω 及交界面

其中，

$$a(u,v)=\int_\Omega p\nabla u\cdot\bullet\nabla v\mathrm{d}x,\qquad (f,v)=\int_\Omega fv\mathrm{d}x.$$

由于 p 是 Ω 上的一个正函数，双线性型 $a(u,v)$ 有界且在 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 上是强制的，即存在常数 $\alpha>0$ 使得

$$a(v,v)\geqslant\alpha\|v\|_{1,\Omega}^2\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega)$$

因此，由 Lax-Milgram 定理 (Ciarlet, 1977) 即得：

定理 9.2.1　对于给定的 $f\in H^{-1}(\Omega)$ 和 $g\in H^{1/2}(\Gamma)$，变分问题 (9.1.5) 存在唯一解 $u\in H_g^1(\Omega)$。■

由于系数 p 在 Ω 上是间断的，方程的解不属于 $H^2(\Omega)$，交界面的交点是一个奇点。在这一节中我们用人工边界方法数值求解这一问题。

9.2.1　人工边界 Γ_R 上的离散边界条件

我们首先引进人工边界 $\Gamma_R=\{\boldsymbol{x}\mid|\boldsymbol{x}|=R\}$ (见图 9-4)，其中 $R<R_0$ 并且 $\Gamma_0=\{\boldsymbol{x}\mid|\boldsymbol{x}|=R_0\}\subset\Omega$。$\Gamma_R$ 将区域 Ω 分为两部分，$\Omega_i=\{\boldsymbol{x}\mid|\boldsymbol{x}|<R\}$ 和 $\Omega_e=\Omega\setminus\overline{\Omega_i}$。

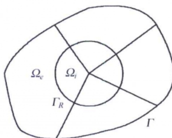


图 9-4　人工边界 Γ_R

假设在区域 Ω_i 内有 $f=0$，则问题 (9.2.1)~(9.2.4) 的解在 Ω_i 上的限制 u 满足：

$$-\nabla(p\nabla u)=0 \quad \text{in } \Omega_i, \tag{9.2.6}$$

$$u=u(R,\theta) \quad \text{on } \Gamma_R, \tag{9.2.7}$$

$$u(r,\phi_k-0)=u(r,\phi_k+0), \quad 1\leqslant k\leqslant M, \tag{9.2.8}$$

$$p_{k-1}\frac{\partial u}{\partial n}(r,\phi_k-0)=p_k\frac{\partial u}{\partial n}(r,\phi_k+0), \quad 1\leqslant k\leqslant M. \tag{9.2.9}$$

对于给定的 $u(R,\theta)\in H^{1/2}(\Gamma_R)$，问题 (9.2.6)~(9.2.9) 存在唯一的弱解 u，且有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}\in H^{-1/2}(\Gamma_R)$，因此我们得到一个有界算子 E：

$$\begin{aligned} E:\quad & H^{1/2}(\Gamma_R)\to H^{-1/2}(\Gamma_R),\\ & \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_R}=E(u|_{\Gamma_R}). \end{aligned} \tag{9.2.10}$$

(9.2.10) 式就是问题 (9.2.1)~(9.2.4) 的解在 Γ_R 上所满足的准确边界条件。然而，E 通常不易求得。以下我们考虑如何近似求得算子 E。问题 (9.2.6)~(9.2.9) 在极坐标下的形式为：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(pr\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(p\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0, \tag{9.2.11}$$

$$u|_{r=R}=u(R,\theta), \quad u \text{ 有界，当 } r\to 0, \tag{9.2.12}$$

$$u|_{\theta=\phi_k-0}=u|_{\theta=\phi_k+0}, \quad 1\leqslant k\leqslant M, \tag{9.2.13}$$

$$p_{k-1}\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=\phi_k-0}=p_k\left.\frac{\partial u}{\partial\theta}\right|_{\theta=\phi_k+0}, \quad 1\leqslant k\leqslant M. \tag{9.2.14}$$

令：

$$V=\{v(\theta):\ v(\theta)\in H^1((0,2\pi)),v(0)=v(2\pi)\},$$

$$U=\{u(r,\theta):\ \text{for fixed } r,0<r\leqslant R,u,\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\in V\}.$$

则边值问题 (9.2.11)~(9.2.14) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases} \text{找 } u(r,\theta)\in U \text{ 使}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\displaystyle\int_0^{2\pi}pu(r,\theta)v(\theta)\mathrm{d}\theta\right)-\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{p}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta=0, \quad \forall v\in V,\\ u|_{r=R}=u(R,\theta), \quad \text{当 } r\to 0 \text{ 时，} u \text{ 有界.} \end{cases}$$

令：

$$A_1(u,v)=\int_0^{2\pi} puv\mathrm{d}\theta,\qquad A_2(u,v)=\int_0^{2\pi} p\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta.$$

则边值问题 (9.2.11)~(9.2.14) 的等价变分问题为：

$$\begin{cases}\text{找 } u(r,\theta)\in U \text{ 使}\\ r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}A_1(u,v)\right)-A_2(u,v)=0, \qquad \forall v\in V,\\ u|_{r=R}=u(R,\theta), \qquad \text{当 } r\to 0 \text{ 时，} u \text{ 有界.}\end{cases} \tag{9.2.15}$$

我们考虑问题 (9.2.15) 的一个半离散近似。首先将 $[0,2\pi]$ 分为

$$0=\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{N+1}=2\pi$$

使得对于任意 $\phi_k, k=1,2,\cdots,M$，有一个 $\theta_{i_k}=\phi_k$。令：

$$h=\max_{1\leqslant j\leqslant N}|\theta_{j+1}-\theta_j|.$$
$$V_h=\{v_h(\theta): v_h(\theta)\in V,\text{并且 } v_h|_{[\theta_j,\theta_{j+1}]} \text{ 是 } \theta \text{ 的线性函数 }\}.$$

V_h 的维数是 N。用 $\psi_i(\theta), i=1,2,\cdots,N$，表示 V_h 的基函数：

$$\psi_1(\theta_j)=\begin{cases}1, & j=1, j=N+1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$
$$\psi_i(\theta_j)=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}\qquad i=2,3,\cdots,N.$$

对于 $v_h(\theta)\in V_h$ 我们有：

$$v_h(\theta)=\hat{\boldsymbol{v}}_h^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}(\theta)$$

其中，

$$\boldsymbol{\psi}(\theta)=[\psi_1(\theta),\psi_2(\theta),\cdots,\psi_N(\theta)]^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{\boldsymbol{v}}_h=[v_h(\theta_1),v_h(\theta_2),\cdots,v_h(\theta_N)]^{\mathrm{T}}.$$

令：

$$U_h=\left\{u_h(r,\theta):\ \text{对固定的 } r, 0<r\leqslant R, u_h,\frac{\partial u_h}{\partial r},\frac{\partial^2 u_h}{\partial r^2}\in V_h\right\}.$$

则我们得到问题 (9.2.15) 的一个半离散近似：

$$\begin{cases}\text{找 } u_h(r,\theta)\in U_h \text{ 使}\\ r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}A_1(u_h,v_h)\right)-A_2(u_h,v_h)=0, \qquad \forall v_h\in V_h,\\ u_h|_{r=R}=u_h^0, \qquad \text{当 } r\to 0 \text{ 时，} u_h \text{ 有界.}\end{cases} \tag{9.2.16}$$

其中 $u_h^0 = (\hat{\boldsymbol{u}}_h^0)^t \boldsymbol{\psi}(\theta)$ 以及

$$\hat{\boldsymbol{u}}_h^0 = \left[u_h(R,\theta_1), u_h(R,\theta_2), \cdots, u_h(R,\theta_N)\right]^{\mathrm{T}}.$$

对于任意 $u_h(r,\theta) \in U_h$，令：

$$\hat{\boldsymbol{u}}_h(r) = \left[u_h(r,\theta_1), u_h(r,\theta_2), \cdots, u_h(r,\theta_N)\right]^{\mathrm{T}},$$

则有：

$$u_h(r,\theta) = \hat{\boldsymbol{u}}_h(r)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}(\theta).$$

问题 (9.2.16) 等价于下面的常微分方程的边值问题：

$$\begin{aligned} & r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(B_1 \hat{\boldsymbol{u}}_h(r)\right)\right) - B_2 \hat{\boldsymbol{u}}_h(r) = 0, \\ & \hat{\boldsymbol{u}}_h(r)|_{r=R} = \hat{\boldsymbol{u}}_h^0, \quad \text{当 } r \to 0 \text{ 时，} \hat{\boldsymbol{u}}_h(r) \text{ 有界，} \end{aligned} \tag{9.2.17}$$

其中 B_1 和 B_2 两个 $N \times N$ 矩阵,

$$B_1 = \int_0^{2\pi} p \boldsymbol{\psi}(\theta) \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi} p \psi_i(\theta) \psi_j(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta\right)_{N\times N},$$

$$B_2 = \int_0^{2\pi} p \boldsymbol{\psi}'(\theta) \boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi} p \psi_i'(\theta) \psi_j'(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta\right)_{N\times N}.$$

下面我们求解问题 (9.2.17)。令 $\hat{\boldsymbol{u}}_h(r) = r^\lambda \boldsymbol{\xi}$，其中常数 λ 以及 N 维向量 $\boldsymbol{\xi}$ 是待定的。代入 (9.2.17) 式我们得到：

$$\lambda^2 B_1 \boldsymbol{\xi} - B_2 \boldsymbol{\xi} = 0. \tag{9.2.18}$$

令 $\mu = \lambda^2$，我们得到一个标准的特征值问题：

$$\mu B_1 \boldsymbol{\xi} = B_2 \boldsymbol{\xi}.$$

由于 B_1 是对称正定的，存在一个对称正定矩阵 T_1 使得：

$$B_1 = T_1^2.$$

因此,

$$\mu T_1 \boldsymbol{\xi} = T_1^{-1} B_2 T_1^{-1} T_1 \boldsymbol{\xi},$$

或

$$T_1^{-1} B_2 T_1^{-1} \boldsymbol{\eta} = \mu \boldsymbol{\eta}, \tag{9.2.19}$$

其中 $\boldsymbol{\eta} = T_1\boldsymbol{\xi}$。由于 $T_1^{-1}B_2T_1^{-1}$ 是对称非负定矩阵，特征值问题 (9.2.19) 有 N 个非负特征值：

$$0 = \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_N.$$

和 N 个单位正交特征向量：$\boldsymbol{\eta}_i, i = 1, 2, \cdots, N$。令 $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$，$i = 1, 2, \cdots, N$，则 λ_i 是 (9.2.18) 的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}_i = T_1^{-1}\boldsymbol{\eta}_i$ 是对应的特征向量。令：

$$\hat{\boldsymbol{u}}_h(r) = \sum_{i=1}^{N} b_i r^{\lambda_i}\boldsymbol{\xi}_i,$$

其中 $b_i, i = 1, 2, \cdots, N$，是常数，$\hat{\boldsymbol{u}}_h(r)$ 满足 (9.2.17) 且当 $r \to 0$ 时有界。令：

$$\begin{aligned}
&E = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_N],\\
&D(r) = \operatorname{diag}\left\{r^{\lambda_1}, r^{\lambda_2}, \cdots, r^{\lambda_N}\right\}\\
&\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_N]^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

则：

$$\hat{\boldsymbol{u}}_h(r) = ED(r)\boldsymbol{b}.$$

系数 b_i, $i = 1, 2, \cdots, N$ 可由下面的边界条件决定：

$$\hat{\boldsymbol{u}}_h(r)|_{r=R} = ED(R)\boldsymbol{b}.$$

由此我们得到：

$$\boldsymbol{b} = D^{-1}(R)E^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}_h^0.$$

因此，

$$\hat{\boldsymbol{u}}_h(r) = ED(r)D^{-1}(R)E^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}_h^0$$

和

$$u_h(r, \theta) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_h(r),$$

它们分别是问题 (9.2.17) 和问题 (9.2.16) 的解。在边界 Γ_R 上我们得到：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u_h}{\partial r}\right|_{r=R} &= R^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)\sum_{i=1}^{N}\lambda_i b_i R^{\lambda_i}\boldsymbol{\xi}_i\\
&= R^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)ED(R)\Lambda\boldsymbol{b}\\
&= R^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)ED(R)\Lambda D^{-1}(R)E^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}_h^0\\
&= R^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)E\Lambda E^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}_h^0,
\end{aligned}$$

其中，

$$\varLambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\},$$

或

$$\left.\frac{\partial u_h}{\partial r}\right|_{r=R} = R^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)T_1^{-1}H\varLambda H^{-1}T_1\hat{\boldsymbol{u}}_h^0,$$

其中，

$$H = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_N].$$

由

$$\frac{\partial u_h}{\partial n} = -\frac{\partial u_h}{\partial r},$$

我们得到：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u_h}{\partial n}\right|_{r=R} &= -R^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)T_1^{-1}H\varLambda H^{-1}T_1\hat{\boldsymbol{u}}_h^0 \\ &= -R^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(\theta)T_1^{-1}H\varLambda H^{\mathrm{T}}T_1\hat{\boldsymbol{u}}_h^0.\end{aligned} \tag{9.2.20}$$

等式 (9.2.20) 是算子 E 的一个离散形式，即问题 (9.2.1)~(9.2.4) 的解 u 在 $\varGamma_R$ 上所满足的一个近似边界条件。

9.2.2 有限元近似

限制在区域 $\varOmega_e$ 上，问题 (9.2.1)~(9.2.4) 的解 u 满足：

$$-\nabla(p\nabla u) = f \quad \text{in } \varOmega_e, \tag{9.2.21}$$

$$u = g \quad \text{on } \varGamma, \tag{9.2.22}$$

$$u(r, \phi_k - 0) = u(r, \phi_k + 0), \quad 1 \leqslant k \leqslant M, \tag{9.2.23}$$

$$p_{k-1}\frac{\partial u}{\partial n}(r, \phi_k - 0) = p_k\frac{\partial u}{\partial n}(r, \phi_k + 0), \quad 1 \leqslant k \leqslant M, \tag{9.2.24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = E(u) \quad \text{on } \varGamma_R. \tag{9.2.25}$$

令：

$$\begin{aligned}H_g^1(\varOmega_e) &= \{v : v \in H^1(\varOmega_e), v|_{\varGamma} = g\}, \quad g \neq 0, \\ H_*^1(\varOmega_e) &= \{v : v \in H^1(\varOmega_e), v|_{\varGamma} = 0\}.\end{aligned}$$

则边值问题 (9.2.21)~(9.2.25) 等价于下面的变分问题：

$$\begin{cases}\text{找 } u \in H_g^1(\varOmega_e) \text{ 使} \\ a_e(u, v) + b(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_*^1(\varOmega_e),\end{cases} \tag{9.2.26}$$

其中，

$$a_e(u,v)=\int_{\Omega_e}p\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x,\qquad (f,v)=\int_{\Omega_e}fv\mathrm{d}x,$$

$$b(u,v)=-\int_{\Gamma_R}pE(u)v\mathrm{d}s=-\int_{\Gamma_R}p\frac{\partial u}{\partial n}v\mathrm{d}s.$$

为简单起见，我们假设 Γ 是一个多边形，$\mathcal{J}_h$ 是 Ω_e 的一个剖分，即将 Ω_e 剖分为三角形和曲边三角形。$\mathcal{J}_h$ 在 Γ_R 上的结点为 $(R,\theta_1),(R,\theta_2),\cdots,(R,\theta_M)$, $\mathcal{J}_h$ 在 Γ 上的结点为 $(R_1,\phi_1),(R_2,\phi_2),\cdots,(R_3,\phi_L)$。令：

$$W_h=\{v_h:v_h|_K\in P_1(K),\forall K\in\mathcal{J}_h\},$$

其中 $P_1(K)$ 是单元 $K\in\mathcal{J}_h$ 上的线性函数空间。进一步，令：

$$\begin{aligned}W_{h,g}&=\{v_h:v_h\in W_h,v_h(R_i,\psi_i)=g(R_i,\psi_i),i=1,2,\cdots,L\},\\ W_{h,*}&=\{v_h:v_h\in W_h,v_h|_\Gamma=0\}.\end{aligned}$$

W_h 是 $H^1(\Omega_e)$ 的子空间, $W_{h,*}$ 是 $H^1_*(\Omega_e)$ 的子空间。我们考虑下面的离散问题：

$$\begin{cases}\text{找 } u_h\in W_{h,g} \text{ 使}\\ a_e(u_h,v_h)+b(u_h,v_h)=(f,v_h),\qquad \forall v_h\in W_{h,*}.\end{cases}\tag{9.2.27}$$

利用离散边界条件 (9.2.20)，我们可以用下面给出的双线性形式 $b_h(u_h,v_h)$ 来近似双线性形式 $b(u_h,v_h)$：

$$\begin{aligned}b(u_h,v_h)&=-\int_{\Gamma_R}p\frac{\partial u_h}{\partial n}v_h\mathrm{d}s\\ &=-\int_0^{2\pi}p\frac{\partial u_h}{\partial n}v_hR\mathrm{d}\theta\\ &\approx(\hat{\boldsymbol{v}}_h^0)^{\mathrm{T}}\left(\int_0^{2\pi}p\boldsymbol{\psi}(\theta)\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta\right)T_1^{-1}H\Lambda H^{\mathrm{T}}T_1\hat{\boldsymbol{u}}_h^0\\ &=(\hat{\boldsymbol{v}}_h^0)^{\mathrm{T}}B_1T_1^{-1}H\Lambda H^{\mathrm{T}}T_1\hat{\boldsymbol{u}}_h^0\\ &=(\hat{\boldsymbol{v}}_h^0)^{\mathrm{T}}T_1H\Lambda H^{\mathrm{T}}T_1\hat{\boldsymbol{u}}_h^0\equiv b_h(u_h,v_h).\end{aligned}$$

因此我们得到下面的近似问题：

$$\begin{cases}\text{找 } u_h\in W_{h,g} \text{ 使}\\ a_e(u_h,v_h)+b_h(u_h,v_h)=(f,v_h),\qquad \forall v_h\in W_{h,*}.\end{cases}\tag{9.2.28}$$

由于双线性形式 $b_h(u_h, v_h)$ 满足：

$$b_h(v_h, v_h) \geqslant 0, \qquad \forall v_h \in W_{h,*}.$$

则有

定理 9.2.2 近似问题 (9.2.28) 存在唯一有限元解 u_h。 ■

9.3 带有奇性的线性弹性问题

线性弹性方程组是工程上常用的一个描述弹性材料的数学模型。与前两节类似，方程组的解在某些情况下会出现奇性，例如复合材料问题，或材料本身带有角点、裂纹。在这一节中，我们将应用人工边界方法来求解带有奇性的线性弹性方程组, 以提高数值解的精度。假设区域 Ω 是一个多角型区域 (如图 9-5(a) 所示)，在原点的内角为 $\Theta, (\pi < \Theta \leqslant 2\pi)$。$\Omega$ 的边界由三部分组成：Γ_0 $(\theta = 0)$，Γ_Θ $(\theta = \Theta)$，以及 Γ。我们考虑下面的线性弹性问题：

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) - \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = f_1, \tag{9.3.1}$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = f_2. \tag{9.3.2}$$

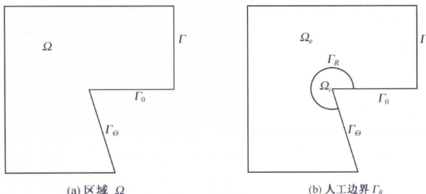
$$u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = 0, \tag{9.3.3}$$

$$u_1|_{\Gamma_0} = u_2|_{\Gamma_0} = 0, \quad u_1|_{\Gamma_\Theta} = u_2|_{\Gamma_\Theta} = 0, \tag{9.3.4}$$

$$\text{当 } |x| \to 0 \text{ 时, } \boldsymbol{u} \text{ 有界,} \tag{9.3.5}$$

其中 u_1, u_2 是位移的两个分量，λ, μ 是 Lamé 常数。在边界 Γ_0 和 Γ_Θ 上，也可以给定应力。众所周知，此问题的解在原点具有奇性，而奇性的强度依赖于内角的大小 (Karp and Karal, 1962)。特别地当 $\Theta = 2\pi$，在边界 Γ_0 和 Γ_Θ 上给定应力为零，我们就得到二维线性弹性断裂力学中的基本问题 —— 应力强度因子的计算 (Anderson, 1995)。

应用人工边界方法，我们可以将奇点从 Ω 中分割出去。假设 Γ_R 是半径为 R 的圆弧。Γ_R 将区域 Ω 分为两部分：带有奇点的部分 Ω_i 和不带奇点的区域 Ω_e (如图 9-5(b) 所示)。如果可以给出在 Γ_R 上的边界条件，则我们可以在不带奇点的部分 Ω_e 中求解此问题。下面我们首先找出位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1, u_2)$ 在 Γ_R 上所满足的边界条件，以便讨论其数值解法。



(a) 区域 Ω　　(b) 人工边界 Γ_R

图 9-5

9.3.1 人工边界 Γ_R 上的离散边界条件

假设在 Ω_i 中，$f_1=f_2=0$。则在极坐标下，问题 (9.3.1)~(9.3.5) 的解在 Ω_i 上的限制满足：

$$(\lambda+2\mu)\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)\right\}$$

$$-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)-\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right\}=0, \tag{9.3.6}$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right\}$$

$$+\mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\right\}=0, \tag{9.3.7}$$

$$u_r|_{\theta=0}=u_r|_{\theta=\Theta}=0, \tag{9.3.8}$$

$$u_\theta|_{\theta=0}=u_\theta|_{\theta=\Theta}=0, \tag{9.3.9}$$

$$\text{当 } |x|\to 0 \text{ 时, } \boldsymbol{u} \text{ 有界}, \tag{9.3.10}$$

其中 u_r 和 u_θ 是位移 $\boldsymbol{u}$ 在极坐标下的分量。令：

$$V_1=\left\{\boldsymbol{v}=(v_r,v_\theta):\boldsymbol{v}\in H^1((0,\Theta))^2,\ \boldsymbol{v}|_{\theta=0}=\boldsymbol{v}|_{\theta=\Theta}=0\right\},$$

$$U_1=\left\{\boldsymbol{u}=(u_r,u_\theta):\forall r,\boldsymbol{u},\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial r},\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial r^2}\in V_1\right\}.$$

则问题 (9.3.5)~(9.3.9) 等价于下面的微分变分问题：

$$
\begin{cases}
\text{找 } (u_r(r,\theta),u_\theta(r,\theta))\in U_1 \text{ 使} \\
(\lambda+2\mu)\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\displaystyle\int_0^\Theta u_r v_r \mathrm{d}\theta\right)\right)+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta \dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}v_r\mathrm{d}\theta\right)\right\} \\
\quad -\dfrac{\mu}{r^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\displaystyle\int_0^\Theta \dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}v_r\mathrm{d}\theta\right)+\displaystyle\int_0^\Theta \dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right\} \\
\quad +\dfrac{(\lambda+2\mu)}{r^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\displaystyle\int_0^\Theta \dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}v_\theta\mathrm{d}\theta\right)-\displaystyle\int_0^\Theta \dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right\} \\
\quad +\mu\left\{\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\displaystyle\int_0^\Theta u_\theta v_\theta\mathrm{d}\theta\right)\right)-\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta \dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}v_\theta\mathrm{d}\theta\right)\right\}=0 \\
\qquad\qquad \forall (v_r(\theta),v_\theta(\theta))\in V_1, \\
\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R} \text{ 给定}, \quad \text{当 } r\to 0 \text{ 时}, \boldsymbol{u} \text{ 有界},
\end{cases}
\tag{9.3.11}
$$

令:

$$
A_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_0^\Theta ((\lambda+2\mu)u_r v_r+\mu u_\theta v_\theta)\,\mathrm{d}\theta,
$$

$$
B_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_0^\Theta \left(\mu\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\theta,
$$

$$
C_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_0^\Theta \left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}v_r-\mu\frac{\partial u_r}{\partial\theta}v_\theta\right)\mathrm{d}\theta,
$$

$$
C_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_0^\Theta \left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial\theta}v_\theta-\mu\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}v_r\right)\mathrm{d}\theta.
$$

则问题 (9.3.11) 可写为:

$$
\begin{cases}
\text{找 } \boldsymbol{u}\in U_1 \text{ 使} \\
\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))\right)-\dfrac{B_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{r^2}+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{C_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{r}\right) \\
\quad +\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(rC_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))=0, \quad \forall \boldsymbol{v}\in V_1, \\
\boldsymbol{u}|_{\Gamma_R} \text{ 给定}, \quad \text{当 } r\to 0 \text{ 时}, \boldsymbol{u} \text{ 有界},
\end{cases}
\tag{9.3.12}
$$

我们考虑问题 (9.3.12) 的一个半离散近似。首先将区间 $[0,\Theta]$ 分为

$$
0=\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_N=\Theta.
$$

令:

$$h = \max_{1 \leqslant j \leqslant N-1} |\theta_{j+1} - \theta_j|,$$

$$V_{1,h} = \{\boldsymbol{v}_h = (v_r^h(\theta), v_\theta^h(\theta)) : \boldsymbol{v}_h \in V_1,\ \boldsymbol{v}_h|_{[\theta_j,\theta_{j+1}]} \text{ 是 } \theta \text{ 的线性函数}\}.$$

用 $(\psi_i(\theta), 0)$, $(0, \psi_j(\theta))$, $i, j = 1, 2, \cdots, N$ 表示 $V_{1,h}$ 的基函数, 其中

$$\psi_i(\theta_j) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

对于 $\boldsymbol{v}_h \in V_{1,h}$, 我们有:

$$\boldsymbol{v}_h = (\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{v}}_r^h, \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{v}}_\theta^h),$$

其中,

$$\boldsymbol{\psi}(\theta) = (\psi_1(\theta), \psi_2(\theta), \cdots, \psi_N(\theta))^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_r^h = \left(v_r^h(\theta_1), v_r^h(\theta_2), \cdots, v_r^h(\theta_N)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_\theta^h = \left(v_\theta^h(\theta_1), v_\theta^h(\theta_2), \cdots, v_\theta^h(\theta_N)\right)^{\mathrm{T}}.$$

令:

$$U_{1,h} = \left\{\boldsymbol{u}_h = (u_r^h(r,\theta), u_\theta^h(r,\theta)) : \forall r, \boldsymbol{u}_h, \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial r}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_h}{\partial r^2} \in V_{1,h}\right\}.$$

则我们得到问题 (9.3.12) 的一个半离散近似:

$$\begin{cases} \text{找 } \boldsymbol{u}_h \in U_{1,h} \text{ 使} \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_1(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h))\right) - \dfrac{1}{r^2}B_1(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}C_1(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)\right) \\ +\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(rC_2(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h)) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in V_{1,h}, \\ \boldsymbol{u}_h|_{\Gamma_R} \text{ 给定}, \quad \text{当 } r \to 0 \text{ 时}, \boldsymbol{u}_h \text{ 有界}, \end{cases} \tag{9.3.13}$$

对于 $\boldsymbol{u}_h \in U_{1,h}$, 令:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r) = \left(u_r^h(r,\theta_1), u_r^h(r,\theta_2), \cdots, u_r^h(r,\theta_N)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r) = \left(u_\theta^h(r,\theta_1), u_\theta^h(r,\theta_2), \cdots, u_\theta^h(r,\theta_N)\right)^{\mathrm{T}},$$

则:

$$u_r^h(r,\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r), \qquad u_\theta^h(r,\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r).$$

因此问题 (9.3.13) 等价于下面的常微分方程组的边值问题：

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu)\left\{A_s\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{\boldsymbol{u}}_r^h\right)\right)+C_s\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h}{r}\right)\right\} \\ \quad -\dfrac{\mu}{r^2}\left\{C_s\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\right)+B_s\hat{\boldsymbol{u}}_r^h\right\}=0, \\ \dfrac{(\lambda+2\mu)}{r^2}\left\{C_s\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{\boldsymbol{u}}_r^h\right)-B_s\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\right\} \\ \quad +\mu\left\{A_s\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\right)\right)-C_s\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}_r^h}{r}\right)\right\}=0, \\ \hat{\boldsymbol{u}}_r^h|_{\Gamma_R},\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h|_{\Gamma_R}\ \text{给定}, \quad \text{当}\ r\to 0\ \text{时},\ \hat{\boldsymbol{u}}_r^h,\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\ \text{有界}, \end{cases} \tag{9.3.14}$$

其中 A_s, B_s, C_s 是 $N\times N$ 矩阵：

$$A_s=\int_0^\Theta \boldsymbol{\psi}(\theta)\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta, \quad B_s=\int_0^\Theta \boldsymbol{\psi}'(\theta)\boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta,$$
$$C_s=\int_0^\Theta \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}'(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

假设问题 (9.3.14) 的解具有下面形式：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h \end{bmatrix}=r^\sigma\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}.$$

将其代入到 (9.3.14), 我们得到：

$$((1-\sigma^2)(\lambda+2\mu)A_s+\mu B_s)\boldsymbol{\xi}+((\lambda+3\mu)-\sigma(\lambda+\mu))C_s\boldsymbol{\eta}=0,$$
$$-((\lambda+3\mu)+\sigma(\lambda+\mu))C_s\boldsymbol{\xi}+((1-\sigma^2)\mu A_s+(\lambda+2\mu)B_s)\boldsymbol{\eta}=0,$$

即：

$$\left((1-\sigma^2)I+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\hat{B}_s\right)\boldsymbol{\xi}+\frac{1}{\lambda+2\mu}((\lambda+3\mu)-\sigma(\lambda+\mu))\hat{C}_s\boldsymbol{\eta}=0, \tag{9.3.15}$$

$$-\frac{1}{\mu}((\lambda+3\mu)+\sigma(\lambda+\mu))\hat{C}_s\boldsymbol{\xi}+\left((1-\sigma^2)I+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\hat{B}_s\right)\boldsymbol{\eta}=0, \tag{9.3.16}$$

其中，

$$\hat{B}_s=A_s^{-1}B_s, \quad \hat{C}_s=A_s^{-1}C_s.$$

(9.3.15)~(9.3.16) 等价于下面的特征值问题：

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\zeta}=\sigma\boldsymbol{\zeta}$$

其中,

$$P=\begin{bmatrix} 0 & I+\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\hat{B}_s & -\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\hat{C}_s & \dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\hat{C}_s \\ I & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\hat{C}_s & -\dfrac{\lambda+3\mu}{\mu}\hat{C}_s & 0 & I+\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\hat{B}_s \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\zeta}=\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}} \\ \boldsymbol{\xi} \\ \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix},$$

以及 $\hat{\boldsymbol{\xi}}=\sigma\boldsymbol{\xi}$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}=\sigma\boldsymbol{\eta}$。为讨论矩阵 P 的性质, 我们先证明下面的引理:

引理 9.3.1　假设 $H_{ij}, i,j=1,2$, 是任意 $N\times N$ 实矩阵, 且 $H_{12}=H_{21}$, s 和 t 是任意复数。若矩阵

$$\begin{bmatrix} H_{11} & sH_{12} \\ tH_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \tag{9.3.17}$$

是奇异矩阵, 则矩阵

$$\begin{bmatrix} H_{11} & -tH_{12} \\ -sH_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \tag{9.3.18}$$

也是奇异矩阵。

证明　若 $s=0$ 或者 $t=0$, 则引理显然成立, 因为矩阵 (9.3.17) 和矩阵 (9.3.18) 有相同的行列式 $\det(H_{11})\det(H_{22})$。若 $s\neq 0$, $t\neq 0$, 且矩阵 (9.3.17) 是奇异矩阵, 则方程组

$$\begin{aligned} H_{11}\boldsymbol{\xi}+sH_{12}\boldsymbol{\eta}&=0, \\ tH_{21}\boldsymbol{\xi}+H_{22}\boldsymbol{\eta}&=0 \end{aligned}$$

有非零解 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$。因此我们有:

$$\begin{aligned} H_{11}\boldsymbol{\xi}-tH_{12}\left(-\frac{s}{t}\right)\boldsymbol{\eta}&=0, \\ -sH_{21}\left(-\frac{t}{s}\right)\boldsymbol{\xi}+H_{22}\boldsymbol{\eta}&=0, \end{aligned}$$

或

$$-\frac{s}{t}\left(H_{11}\left(-\frac{t}{s}\boldsymbol{\xi}\right)-tH_{12}\boldsymbol{\eta}\right)=0,$$

$$-sH_{21}\left(-\frac{t}{s}\right)\boldsymbol{\xi}+H_{22}\boldsymbol{\eta}=0,$$

即方程组

$$H_{11}\boldsymbol{\xi}'-tH_{12}\boldsymbol{\eta}'=0,$$
$$-sH_{21}\boldsymbol{\xi}'+H_{22}\boldsymbol{\eta}'=0,$$

有非零解：

$$\boldsymbol{\xi}'=-\frac{t}{s}\boldsymbol{\xi},\qquad \boldsymbol{\eta}'=\boldsymbol{\eta},$$

则矩阵 (9.3.18) 是奇异矩阵。 ■

对于矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的特征值，我们有：

引理 9.3.2 若 σ 是 $\boldsymbol{P}$ 的一个特征值, 则 $-\sigma$ 也是 $\boldsymbol{P}$ 的一个特征值。

证明 令：

$$H_{11}=(1-\sigma^2)(\lambda+2\mu)A_s+\mu B_s,\qquad H_{12}=C_s,$$
$$H_{21}=C_s,\qquad H_{22}=(1-\sigma^2)\mu A_s+(\lambda+2\mu)B_s,$$
$$s=(\lambda+3\mu)-\sigma(\lambda+\mu),\qquad t=-(\lambda+3\mu)-\sigma(\lambda+\mu).$$

由于 σ 是 P 的一个特征值, 由 (9.3.15), (9.3.16) 可知矩阵

$$\begin{bmatrix} H_{11} & sH_{12} \\ tH_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

是奇异矩阵。因此由引理 9.3.1 即得矩阵

$$\begin{bmatrix} H_{11} & -tH_{12} \\ -sH_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

也是奇异矩阵。方程组

$$\begin{bmatrix} H_{11} & -tH_{12} \\ -sH_{21} & H_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}' \\ \boldsymbol{\eta}' \end{bmatrix}=0,$$

或

$$((1-\sigma^2)(\lambda+2\mu)A_s+\mu B_s)\boldsymbol{\xi}'+((\lambda+3\mu)+\sigma(\lambda+\mu))C_s\boldsymbol{\eta}'=0, \tag{9.3.19}$$

$$(\sigma(\lambda+\mu)-(\lambda+3\mu))C_s\boldsymbol{\xi}'+((1-\sigma^2)\mu A_s+(\lambda+2\mu)B_s)\boldsymbol{\eta}'=0, \tag{9.3.20}$$

存在非零解 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$。另一方面，在 (9.3.15) 和 (9.3.16) 中以 $-\sigma$ 代替 σ, $\boldsymbol{\xi}'$ 代替 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}'$ 代替 $\boldsymbol{\eta}$, 即得 (9.3.19) 和 (9.3.20)。因此有：

$$P\boldsymbol{\zeta}' = -\sigma\boldsymbol{\zeta}'$$

其中，

$$\boldsymbol{\zeta}' = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}' \\ \boldsymbol{\xi}' \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}' \\ \boldsymbol{\eta}' \end{bmatrix},$$

以及 $\hat{\boldsymbol{\xi}}' = -\sigma\boldsymbol{\xi}'$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}' = -\sigma\boldsymbol{\eta}'$。即 $-\sigma$ 也是 P 的一个特征值。 ■

引理 9.3.3 矩阵 P 没有零特征值。

证明 若零是 P 的一个特征值，其对应的特征向量为：$(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\eta})$，则：

$$\hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r) = \boldsymbol{\xi}, \quad \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r) = \boldsymbol{\eta}.$$

代入到 (9.3.13) 中，我们得到：

$$((\lambda+2\mu)A_s + \mu B_s)\boldsymbol{\xi} + (\lambda+3\mu)C_s\boldsymbol{\eta} = 0,$$
$$(\lambda+3\mu)C_s\boldsymbol{\xi} + (\mu A_s + (\lambda+2\mu)B_s)\boldsymbol{\eta} = 0.$$

不难看出矩阵

$$\begin{bmatrix} ((\lambda+2\mu)A_s + \mu B_s) & (\lambda+3\mu)C_s \\ (\lambda+3\mu)C_s & (\mu A_s + (\lambda+2\mu)B_s) \end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵。因此 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} = 0$, 即零不是 P 的一个特征值。 ■

由引理 9.3.2 和引理 9.3.3 即得：

定理 9.3.1 矩阵 P 只有 $2N$ 个具有正实部的特征值。 ■

以 σ_j, $j = 1, 2, \cdots, 2N$ 表示 P 的有正实部的特征值。若 P 有 $2N$ 个线性独立的特征向量，且 σ_j, $j = 1, 2, \cdots, 2N$ 为实数，则问题 (9.3.14) 的解可以表示为：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r) \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} c_j r^{\sigma_j} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_j \\ \boldsymbol{\eta}_j \end{bmatrix}, \tag{9.3.21}$$

其中 c_j, $j = 1, 2, \cdots, 2N$, 是常数。若 $\sigma_j = a \pm \mathrm{i}b$ 是一对复特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_j = \boldsymbol{\alpha} \pm \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}$, 则其对应的实解为：

$$r^a(\boldsymbol{\alpha}\cos(b\ln r) - \boldsymbol{\beta}\sin(b\ln r)),$$
$$r^a(\boldsymbol{\alpha}\sin(b\ln r) + \boldsymbol{\beta}\cos(b\ln r)).$$

我们可以类似地表示问题 (9.3.14) 的解。令:

$$E = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \boldsymbol{\xi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\xi}_{2N} \\ \boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\eta}_{2N} \end{bmatrix},$$

$$D(r) = \mathrm{diag}\left\{r^{\sigma_1}, r^{\sigma_2}, \cdots, r^{\sigma_{2N}}\right\}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{2N} \end{bmatrix}.$$

则 (9.3.21) 可以写为:

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r) \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r) \end{bmatrix} = ED(r)\boldsymbol{c}.$$

限制在边界 Γ_R 上我们有:

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h(R) \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(R) \end{bmatrix} = ED(R)\boldsymbol{c}.$$

则:

$$\boldsymbol{c} = D^{-1}(R)E^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h(R) \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(R) \end{bmatrix}. \tag{9.3.22}$$

因此，问题 (9.3.14) 的解是:

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r) \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r) \end{bmatrix} = ED(r)D^{-1}(R)E^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h(R) \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(R) \end{bmatrix}. \tag{9.3.23}$$

由此得到问题 (9.3.13) 的解:

$$\boldsymbol{u}_h(r,\theta) = (\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r), \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r)) \equiv I_h(r,\theta,R,\mathbf{u}_h(R,\theta)). \tag{9.3.24}$$

由 (9.3.21) 我们有:

$$u_r^h(r,\theta) = \sum_{j=1}^{2N} c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_j, \quad u_\theta^h(r,\theta) = \sum_{j=1}^{2N} c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j.$$

对 r 求导我们得到:

$$\frac{\partial u_r^h}{\partial r} = \sum_{j=1}^{2N} c_j\sigma_j r^{\sigma_j-1}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_j, \quad \frac{\partial u_\theta^h}{\partial r} = \sum_{j=1}^{2N} c_j\sigma_j r^{\sigma_j-1}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j,$$

$$\frac{\partial u_r^h}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^{2N} c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_j, \quad \frac{\partial u_\theta^h}{\partial \theta} = \sum_{j=1}^{2N} c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j.$$

由此我们得到下面的应力边界条件：

$$\sigma_{rr}^h(R,\theta)=\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r^h}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial u_\theta^h}{\partial \theta}+\frac{\lambda}{r}u_r^h\right]_{r=R}$$

$$=\frac{1}{R}\sum_{j=1}^{2N}c_jR^{\sigma_j}[(\lambda\sigma_j+2\mu\sigma_j+\lambda)\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_j+\lambda\boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j], \tag{9.3.25}$$

$$\sigma_{r\theta}^h(R,\theta)=\left[\mu\frac{\partial u_\theta^h}{\partial r}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial u_r^h}{\partial \theta}-\frac{\mu}{r}u_\theta^h\right]_{r=R}$$

$$=\frac{\mu}{R}\sum_{j=1}^{2N}c_jR^{\sigma_j}[\boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_j+(\sigma_j-1)\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j], \tag{9.3.26}$$

其中 σ_{rr}^h 和 $\sigma_{r\theta}^h$ 是应力在极坐标下的分量，$c_j, j=1,2,\cdots,2N$，由 (9.3.22) 给出。要得到这些边界条件，我们需要解一个特征值问题。不过，这个特征值问题是比原问题低一维的问题。因此，与原问题相比, 其计算量可以忽略。

9.3.2　基于人工边界条件的迭代法

应用近似人工边界条件 (9.3.24)，我们可以构造一个迭代法在不带奇点的区域上求解问题 (9.3.1)~(9.1.5)。假设 $R_2>R_1$，令：

$$\Omega_{e,1}=\{(r,\theta):\ (r,\theta)\in\Omega \text{ and } r\geqslant R_1\},$$

$$\Omega_{i,2}=\{(r,\theta):\ (r,\theta)\in\Omega \text{ and } r\leqslant R_2\},$$

用 Γ_1 和 Γ_2 表示对应于 $r=R_1$ 和 $r=R_2$ 的圆弧。在 $\Omega_{e,1}$ 上我们考虑下面的问题：

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=f_1,\ \text{in } \Omega_{e,1}, \tag{9.3.27}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=f_2,\ \text{in } \Omega_{e,1}, \tag{9.3.28}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_0}=\boldsymbol{u}|_{\Gamma_\Theta}=0,\qquad \boldsymbol{u}|_{\Gamma}=0, \tag{9.3.29}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_1}=\bar{\boldsymbol{u}}, \tag{9.3.30}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 由离散边界条件 (9.3.24) 给出：

$$\bar{\boldsymbol{u}}\approx I_h(R_1,\theta,R_2,\boldsymbol{u}_h(R_2,\theta)). \tag{9.3.31}$$

由于 $\boldsymbol{u}_h(R_2,\theta)$ 也是未知的，我们用下面的迭代法来求解问题 (9.3.27)~(9.3.31)：对于任给的初值 $\bar{\boldsymbol{u}}=\bar{\boldsymbol{u}}^{(0)}$，我们解边值问题 (9.3.27)~(9.3.30) 而得到 $\Omega_{e,1}$ 中的

解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{(1)}$。用 $\boldsymbol{u}^{(1)}$ 在 Γ_2 上的值，由 (9.3.31) 即得 $\boldsymbol{u}$ 在 Γ_1 上的新的值。由此新的 Γ_1 上的边界条件，我们再解边值问题 (9.3.27)~(9.3.30)。如此重复，即得到一个迭代过程。令：

$$\begin{aligned}
V_h=&\{\boldsymbol{v}_h:\ \boldsymbol{v}_h\in H_0^1(\Omega_{e,1})^2\},\\
V_h^{(n)}=&\{\boldsymbol{v}_h^{(n)}:\ \boldsymbol{v}_h^{(n)}\in H^1(\Omega_{e,1})^2, \boldsymbol{v}_h^{(n)}|_{\Gamma_0}=\boldsymbol{v}_h^{(n)}|_{\Gamma_\Theta}=0,\\
&\boldsymbol{v}_h^{(n)}|_{\Gamma}=0, \boldsymbol{v}_h^{(n)}|_{\Gamma_1}=I_h(R_1,\theta,R_2,\boldsymbol{v}_h^{(n-1)}(R_2,\theta))\},
\end{aligned}$$

则我们有下面的迭代法：

$$\begin{cases}
\text{给定 } \boldsymbol{u}_h^{(0)}(R_2,\theta),\ \epsilon,\\
\text{对于 } \left|\boldsymbol{u}_h^{(n)}-\boldsymbol{u}_h^{(n-1)}\right|_{\infty,\Omega_{e,1}}>\epsilon,\ n=1,2,\cdots,\ \text{解下面的问题：}\\
\text{找 } \boldsymbol{u}_h^{(n)}\in V_h^{(n)} \text{ 使}\\
a_e(\boldsymbol{u}_h^{(n)},\boldsymbol{v}_h)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h)\quad \forall \boldsymbol{v}_h\in V_h.
\end{cases}\tag{9.3.32}$$

其中，

$$\begin{aligned}
a_e(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=&\int_{\Omega_{e,1}}\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right.\\
&+2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\\
&\left.+\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\
(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})=&\int_{\Omega_{e,1}}(f_1v_1+f_2v_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

不难验证上述的迭代法等价于下面的 Schwarz 交替迭代法：

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial y}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x}-\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial y}\right)=f_1,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_{e,1},\tag{9.3.33}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2^{(n)}}{\partial x}-\frac{\partial u_1^{(n)}}{\partial y}\right)=f_2,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_{e,1},\tag{9.3.34}$$

$$\boldsymbol{u}^{(n)}|_{\Gamma_0}=\boldsymbol{u}^{(n)}|_{\Gamma_\Theta}=0,\qquad \boldsymbol{u}^{(n)}|_{\Gamma}=0,\tag{9.3.35}$$

$$\boldsymbol{u}^{(n)}|_{\Gamma_1}=\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)}|_{\Gamma_1}.\tag{9.3.36}$$

及

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{u}_1^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_2^{(n)}}{\partial y}\right)-\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{u}_2^{(n)}}{\partial x}-\frac{\partial \bar{u}_1^{(n)}}{\partial y}\right)=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_{i,2}, \tag{9.3.37}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{u}_1^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_2^{(n)}}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{u}_2^{(n)}}{\partial x}-\frac{\partial \bar{u}_1^{(n)}}{\partial y}\right)=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega_{i,2}, \tag{9.3.38}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}|_{\Gamma_0}=\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}|_{\Gamma_\Theta}=0, \tag{9.3.39}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}|_{\Gamma_2}=\boldsymbol{u}^{(n)}|_{\Gamma_2}. \tag{9.3.40}$$

令：

$$V=(H_0^1(\Omega))^2,\quad V_e=(H_0^1(\Omega_{e,1}))^2,\quad V_i=(H_0^1(\Omega_{i,2}))^2.$$

则对应于 (9.3.33)~(9.3.36) 和 (9.3.37)~(9.3.40) 的变分形式为：

$$\begin{cases}\text{找 } \boldsymbol{u}^{(n)}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)}\in V_e \text{ 使}\\ a_e(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_e)=0,\quad \forall \boldsymbol{v}_e\in V_e,\end{cases} \tag{9.3.41}$$

和

$$\begin{cases}\text{找 } \bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\boldsymbol{u}^{(n)}\in V_i \text{ 使}\\ a_i(\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_i)=0,\quad \forall \boldsymbol{v}_i\in V_i,\end{cases} \tag{9.3.42}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是准确解，

$$\begin{aligned}a_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_{\Omega_{i,2}}&\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right.\\&+2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\\&\left.+\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

显然，我们可以将 V_e 和 V_i 中的函数作零延拓而得到定义在 Ω 上的函数。则 (9.3.41) 和 (9.3.42) 可以写为：

$$\begin{cases}\text{找 } \boldsymbol{u}^{(n)}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)}\in V_e \text{ 使}\\ a(\boldsymbol{u}^{(n)}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)},\boldsymbol{v}_e)=a(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)},\boldsymbol{v}_e),\quad \forall \boldsymbol{v}_e\in V_e,\end{cases} \tag{9.3.43}$$

和

$$\begin{cases}\text{找 } \bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\boldsymbol{u}^{(n)}\in V_i \text{ 使}\\ a(\boldsymbol{u}^{(n)}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)},\boldsymbol{v}_e)=a(\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\boldsymbol{u}^{(n)},\boldsymbol{v}_i)=a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(n)},\boldsymbol{v}_i)=0,\\ \qquad\qquad\qquad\forall \boldsymbol{v}_i\in V_i,\end{cases} \tag{9.3.44}$$

其中，

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_{\Omega}\left\{\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right.$$
$$+2\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)$$
$$\left.+\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用 $P_{V_e}:V\to V_e$ 和 $P_{V_i}:V\to V_i$ 表示内积空间 V 中的投影算子，则有：

$$\boldsymbol{u}^{(n)}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)}=P_{V_e}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)})$$
$$\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}-\boldsymbol{u}^{(n)}=P_{V_i}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(n)}),\qquad n=1,2,\cdots.$$

由于 $\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(n)}+\boldsymbol{u}^{(n)}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)}$ 及 $\boldsymbol{u}^{(n)}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)}\in V_e$, 我们有 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(n)}\in V_e^{\perp}$。类似地, $\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}\in V_i^{\perp}$，其中 $V_e^{\perp}$ 和 $V_i^{\perp}$ 是 V_e 和 V_i 在 V 中的直交补。因此

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(n)}=P_{V_e^{\perp}}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n-1)})\tag{9.3.45}$$

$$\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)}=P_{V_i^{\perp}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(n)}),\qquad n=1,2,\cdots.\tag{9.3.46}$$

令：

$$\boldsymbol{\delta}^{(n)}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{(n)},\quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(n)}=\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}^{(n)},\qquad n=1,2,\cdots,$$

则 (9.3.41) 和 (9.3.42) 可以写为：

$$\boldsymbol{\delta}^{(n)}=P_{V_e^{\perp}}\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(n-1)},\quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(n)}=P_{V_i^{\perp}}\boldsymbol{\delta}^{(n)},\qquad n=1,2,\cdots.$$

因此我们有：

$$\boldsymbol{\delta}^{(n+1)}=P_{V_e^{\perp}}P_{V_i^{\perp}}\boldsymbol{\delta}^{(n)},\quad \bar{\boldsymbol{\delta}}^{(n+1)}=P_{V_i^{\perp}}P_{V_e^{\perp}}\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(n)},\qquad n=1,2,\cdots.$$

类似于 Lions (1988) 和 Yu (1994-A) 中的证明，我们有下面的结果：

定理 9.3.2

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\boldsymbol{\delta}^{(n)}\right\|_1\to 0,\quad \lim_{n\to\infty}\left\|\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(n)}\right\|_1\to 0.$$ ■

定理 9.3.3 存在常数 $C,\ 0\leqslant C<1$, 使得

$$\left\|\boldsymbol{\delta}^{(n)}\right\|_1\leqslant C^{n-1}\left\|\boldsymbol{\delta}^{(1)}\right\|_1,\quad \left\|\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(n)}\right\|_1\leqslant C^{n}\left\|\bar{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}\right\|_1.$$ ■

附注 9.3.1 也可直接应用近似应力边界条件 (9.3.25) 和 (9.3.26) 将问题简化为不带奇点的区域 Ω_e 上，从而可得问题的数值解。

附注 9.3.2　人工边界方法已成功地应用于线性弹性断裂力学中各种问题应力强度因子的计算。有兴趣的读者可进一步参阅论文 Han 和 Huang (1999-B); Han, Huang 和 Bao (2000); Bao, Han 和 Huang (2001); Han 和 Huang (2001-A).

9.4　带有奇性的 Stokes 问题

众所周知，奇异有限元方法是求解带有奇性的偏微分方程的一个很有效的方法。然而，在应用奇异有限元之前，我们必须知道解在奇点的解析展开式，再将主要的奇性项加到有限元基函数中。对于很多复杂的偏微分方程，我们很难得到这样的解析展开式。在这一节中，我们讨论如何应用人工边界方法来找出解在奇点的近似展开式，再用奇异有限元方法来求解带有奇性的 Stokes 问题。

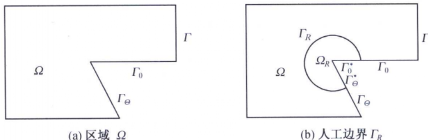
假设区域 Ω 是一个多角型区域 (如图 9-6(a) 所示)，在原点的内角为 $\Theta, (\pi < \Theta \leqslant 2\pi)$。$\Omega$ 的边界由三部分组成：$\Gamma_0\ (\theta = 0), \Gamma_\Theta\ (\theta = \Theta)$ 以及 Γ。我们考虑下面的 Stokes 问题：

$$-v\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{9.4.1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{9.4.2}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_\Theta \cup \Gamma, \tag{9.4.3}$$

其中 v 是流体的粘性系数，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 和 $p(\boldsymbol{x})$ 分别是流体的速度和压力，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 是给定函数。类似于线性弹性方程组，此问题的解在角点带有奇性。



(a) 区域 Ω　　(b) 人工边界 Γ_R

图 9-6

9.4.1　人工边界 Γ_R 上的离散边界条件

假设 $R > 0$ 使得 $\Omega_R = \{(r,\theta):\ 0 < r < R,\ 0 < \theta < \Theta\} \subset \Omega$ (如图 9-4(b) 所示)。Ω_R 的边界由三部分组成：$\Gamma_0^*\ (\theta = 0)$，$\Gamma_\Theta^*\ (\theta = \Theta)$ 以及 Γ_R。假设在 Γ_0^* 和 Γ_Θ^* 上 $\boldsymbol{g} = 0$，在 Ω_R 中 $\boldsymbol{f} = 0$。则问题 (9.4.1)~(9.4.3) 的解在 Ω_R 上的限制

满足：

$$-v\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r u_r\right)+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u_r-2\frac{1}{r^2}\partial_\theta u_\theta-\frac{1}{r^2}u_r\right)+\partial_r p=0,\quad (r,\theta)\in\Omega_R, \tag{9.4.4}$$

$$-v\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r u_\theta\right)+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 u_\theta+2\frac{1}{r^2}\partial_\theta u_r-\frac{1}{r^2}u_\theta\right)+\frac{1}{r}\partial_\theta p=0,\quad (r,\theta)\in\Omega_R, \tag{9.4.5}$$

$$\partial_r u_r+\frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta+\frac{1}{r}u_r=0,\quad (r,\theta)\in\Omega_R, \tag{9.4.6}$$

$$u_r|_{\Gamma_0^*}=u_r|_{\Gamma_\Theta^*}=0,\quad u_\theta|_{\Gamma_0^*}=u_\theta|_{\Gamma_\Theta^*}=0, \tag{9.4.7}$$

其中 u_r 和 u_θ 是 $\boldsymbol{u}$ 在 r 和 θ 方向的分量，∂_r 和 ∂_θ 表示偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial r}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$. 令

$$V=\left\{v: v\in H^1((0,\Theta)),\, v|_{\theta=0}=v|_{\theta=\Theta}=0\right\},$$

$$M=\left\{p(r,\theta):\ \forall r,\ p\in L^2((0,\Theta))\right\},$$

$$U=\left\{u(r,\theta):\ \forall r, u,\partial_r u,\partial_r^2 u\in V\right\},$$

则问题 (9.4.4)~(9.4.7) 等价于下面的微分变分问题：

$$\begin{cases}\text{找 } u_r\in U,\ u_\theta\in U,\ p\in M \text{ 使}\\ -v\left(\dfrac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\displaystyle\int_0^\Theta u_r v_r\mathrm{d}\theta\right)-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_r\partial_\theta v_r\mathrm{d}\theta-\dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_\theta v_r\mathrm{d}\theta\right.\\ \quad\left.-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta u_r v_r\mathrm{d}\theta\right)+\partial_r\displaystyle\int_0^\Theta p v_r\mathrm{d}\theta=0,\quad \forall v_r\in V,\\ -v\left(\dfrac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\displaystyle\int_0^\Theta u_\theta v_\theta\mathrm{d}\theta\right)-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_\theta\partial_\theta v_\theta\mathrm{d}\theta+\dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_r v_\theta\mathrm{d}\theta\right.\\ \quad\left.-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta u_\theta v_\theta\mathrm{d}\theta\right)-\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta p\partial_\theta v_\theta\mathrm{d}\theta=0,\quad \forall v_\theta\in V,\\ \partial_r\displaystyle\int_0^\Theta u_r q\mathrm{d}\theta+\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_\theta q\mathrm{d}\theta+\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta u_r q\mathrm{d}\theta=0,\quad \forall q\in L^2((0,\Theta)).\end{cases} \tag{9.4.8}$$

下面我们考虑问题 (9.4.8) 的半离散近似。将区间 $[0,\Theta]$ 等分为 $m-1=(n+1)/2$ (n 为奇数) 个长度为 h 的子区间：

$$0=\theta_0<\theta_2<\theta_4<\cdots<\theta_{n+1}=\Theta,$$

假设 $V_h \subset V$ 和 $L_h \subset L^2((0,\Theta))$ 是有限元子空间：

$$V_h = \{v_h:\ v_h \in V,\quad v_h|_{[\theta_{2(j-1)},\theta_{2j}]}\ \text{是变量}\theta\text{的二次函数}, j=1,2,\cdots,m-1\},$$
$$L_h = \{q_h:\ q_h \in C((0,\Theta)),\quad q_h|_{[\theta_{2(j-1)},\theta_{2j}]}\ \text{是变量}\theta\text{的线性函数}, j=1,2,\cdots,m-1\},$$

V_h 的基函数为 $\psi_i(\theta), i=1,2,\cdots,n$, 满足：

$$\psi_i(\theta_j) = \begin{cases} 1, & j=i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,n, \quad j=0,1,\cdots,n+1.$$

对于 $v_r^h \in V_h$ 和 $v_\theta^h \in V_h$ 我们有：

$$v_r^h = \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{v}}_r^h, \qquad v_\theta^h = \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{v}}_\theta^h,$$

其中,

$$\boldsymbol{\psi}(\theta) = (\psi_1(\theta), \psi_2(\theta), \cdots, \psi_n(\theta))^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{\boldsymbol{v}}_r^h = \left(v_{r,1}^h, v_{r,2}^h, \cdots, v_{r,n}^h\right)^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\boldsymbol{v}}_\theta^h = \left(v_{\theta,1}^h, v_{\theta,2}^h, \cdots, v_{\theta,n}^h\right)^{\mathrm{T}}.$$

用 $\phi_i(\theta), i=1,2,\cdots,m$ 表示 L_h 的基函数。$\phi_i(\theta)$ 满足：

$$\phi_i(\theta_{2(j-1)}) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad i=1,2,\cdots,m, \quad j=1,2,\cdots,m.$$

则对于 $q_h \in L_h$ 我们有：

$$q_h = \boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{q}}_h$$

其中,

$$\boldsymbol{\phi}(\theta) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \cdots, \phi_m(\theta))^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\boldsymbol{q}}_h = (q_{h,1}, q_{h,2}, \cdots, q_{h,m})^{\mathrm{T}}.$$

令：

$$U_h = \left\{u_h(r,\theta):\ u_h, \partial_r u_h, \partial_r^2 u_h \in V_h,\ \forall r\right\},$$

$$M_h = \{w_h(r,\theta):\ w_h \in L_h,\ \forall r\}.$$

我们考虑问题 (9.4.8) 的有限元近似:

$$\begin{cases}\text{找 } u_r^h \in U_h,\ u_\theta^h \in U_h,\ p_h \in M_h \text{ 使}\\ -v\left(\dfrac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\displaystyle\int_0^\Theta u_r^h v_r^h \mathrm{d}\theta\right)-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_r^h \partial_\theta v_r^h \mathrm{d}\theta-\dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_\theta^h v_r^h \mathrm{d}\theta\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta u_r^h v_r^h \mathrm{d}\theta\right)+\partial_r\displaystyle\int_0^\Theta p_h v_r^h \mathrm{d}\theta = 0,\ \forall v_r^h \in V_h,\\ -v\left(\dfrac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\displaystyle\int_0^\Theta u_\theta^h v_\theta^h \mathrm{d}\theta\right)-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_\theta^h \partial_\theta v_\theta^h \mathrm{d}\theta+\dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_r^h v_\theta^h \mathrm{d}\theta\right.\\ \qquad\left.-\dfrac{1}{r^2}\displaystyle\int_0^\Theta u_\theta^h v_\theta^h \mathrm{d}\theta\right)-\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta p_h \partial_\theta v_\theta^h \mathrm{d}\theta = 0,\quad \forall v_\theta^h \in V_h,\\ \partial_r\displaystyle\int_0^\Theta u_r^h q_h \mathrm{d}\theta+\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta \partial_\theta u_\theta^h q_h \mathrm{d}\theta+\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^\Theta u_r^h q_h \mathrm{d}\theta = 0,\quad \forall q_h \in L_h.\end{cases} \tag{9.4.9}$$

令:

$$u_r^h = \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r),\quad u_\theta^h = \boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r),\quad p_h = \boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{p}}_h(r),$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r) = \left(u_{r,1}^h(r), u_{r,2}^h(r), \cdots, u_{r,n}^h(r)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r) = \left(u_{\theta,1}^h(r), u_{\theta,2}^h(r), \cdots, u_{\theta,n}^h(r)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{p}}_h(r) = \left(p_{h,1}(r), p_{h,2}(r), \cdots, p_{h,m}(r)\right)^{\mathrm{T}}.$$

则问题 (9.4.9) 等价于下面的常微分方程的边值问题:

$$-v\left(\frac{A}{r}\partial_r\left(r\partial_r\hat{\boldsymbol{u}}_r^h\right)-\frac{(A+B)}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h-\frac{2C}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\right)+D\partial_r\hat{\boldsymbol{p}}_h = 0, \tag{9.4.10}$$

$$-v\left(\frac{A}{r}\partial_r\left(r\partial_r\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\right)-\frac{(A+B)}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h-\frac{2C^{\mathrm{T}}}{r^2}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h\right)-\frac{E}{r}\hat{\boldsymbol{p}}_h = 0, \tag{9.4.11}$$

$$D^{\mathrm{T}}\partial_r\hat{\boldsymbol{u}}_r^h+\frac{D^{\mathrm{T}}}{r}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h+\frac{E^{\mathrm{T}}}{r}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h = 0, \tag{9.4.12}$$

其中 A, B, C 是 $n\times n$ 矩阵:

$$A = \int_0^\Theta \boldsymbol{\psi}(\theta)\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta,\quad B = \int_0^\Theta \boldsymbol{\psi}'(\theta)\boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta,$$

$$C = \int_0^\Theta \boldsymbol{\psi}(\theta)\boldsymbol{\psi}'(\theta)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\theta;$$

D, E 是 $n \times m$ 矩阵：

$$D = \int_0^{\Theta} \boldsymbol{\psi}(\theta)\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta, \quad E = \int_0^{\Theta} \boldsymbol{\psi}'(\theta)\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\theta.$$

引进变量变换 $r = \mathrm{e}^s$, 则 (9.4.10)$\sim$(9.4.12) 为：

$$\begin{aligned}
&-v\left(A\partial_s^2 \hat{\boldsymbol{u}}_r^h - (A+B)\hat{\boldsymbol{u}}_r^h - 2C\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\right) + \mathrm{e}^s D\partial_s \hat{\boldsymbol{p}}_h = 0,\\
&-v\left(A\partial_s^2 \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h - (A+B)\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h - 2C^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h\right) - \mathrm{e}^s E\hat{\boldsymbol{p}}_h = 0,\\
&D^{\mathrm{T}}\partial_s \hat{\boldsymbol{u}}_r^h + D^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h + E^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h = 0.
\end{aligned}$$

令：

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_h = r\hat{\boldsymbol{p}}_h, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_r^h = \partial_s \hat{\boldsymbol{u}}_r^h, \quad \hat{\boldsymbol{w}}_\theta^h = \partial_s \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h,$$

则有：

$$\begin{aligned}
&-v\left(A\partial_s \hat{\boldsymbol{w}}_r^h - (A+B)\hat{\boldsymbol{u}}_r^h - 2C\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h\right) + D\partial_s \tilde{\boldsymbol{p}}_h - D\tilde{\boldsymbol{p}}_h = 0,\\
&-v\left(A\partial_s \hat{\boldsymbol{w}}_\theta^h - (A+B)\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h - 2C^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h\right) - E\tilde{\boldsymbol{p}}_h = 0,\\
&D^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{w}}_r^h + D^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_r^h + E^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h = 0.
\end{aligned}$$

其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_s \hat{\boldsymbol{U}}_h \\ \partial_s \tilde{\boldsymbol{p}}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{U}}_h \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_h \end{bmatrix}, \tag{9.4.13}$$

其中，

$$A_{11} = \begin{bmatrix} vA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & v(A+B) & 0 & 2vC \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2vC^{\mathrm{T}} & 0 & v(A+B) \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} -D \\ 0 \\ -E \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} D^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} & 0 & E^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{U}}_h = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{w}}_r^h & \hat{\boldsymbol{u}}_r^h & \hat{\boldsymbol{w}}_\theta^h & \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

由 RQ 分解我们得到:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} = RQ = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix},$$

其中 R 是上三角矩阵, Q 是正交矩阵。由 (9.4.13) 我们有:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}^{\mathrm{T}} & Q_{21}^{\mathrm{T}} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_s \hat{\boldsymbol{U}}_h^* \\ \partial_s \tilde{\boldsymbol{p}}_h^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{U}}_h^* \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_h^* \end{bmatrix}, \tag{9.4.14}$$

或

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A_{11}Q_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Q_{12}^{\mathrm{T}} & A_{11}Q_{21}^{\mathrm{T}} + A_{12}Q_{22}^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_s \hat{\boldsymbol{U}}_h^* \\ \partial_s \tilde{\boldsymbol{p}}_h^* \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{U}}_h^* \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_h^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{U}}_h^* \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_h^* \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{U}}_h \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_h \end{bmatrix}. \tag{9.4.15}$$

对于 RQ 分解我们有:

引理 9.4.1　矩阵

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

是非奇异矩阵, 因此 R_{11} 和 R_{22} 都是非奇异矩阵.

证明　我们只需证明线性方程组

$$\begin{bmatrix} 0 & v(A+B) & 0 & 2vC & -D \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2vC & 0 & v(A+B) & -E \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} & 0 & E^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_r \\ \boldsymbol{u}_r \\ \boldsymbol{w}_\theta \\ \boldsymbol{u}_\theta \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = 0$$

只有零解。由于 $\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}_\theta = 0$, 我们有:

$$v(A+B)\boldsymbol{u}_r + 2vC\boldsymbol{u}_\theta - D\boldsymbol{p} = 0, \tag{9.4.16}$$

$$2vC^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_r + v(A+B)\boldsymbol{u}_\theta - E\boldsymbol{p} = 0, \tag{9.4.17}$$

$$D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_r + E^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_\theta = 0. \tag{9.4.18}$$

由 (9.4.16), (9.4.17) 我们得到：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_r \\ \boldsymbol{u}_\theta \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} A+B & 2C \\ 2C^{\mathrm{T}} & A+B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D\boldsymbol{p} \\ E\boldsymbol{p} \end{bmatrix}. \tag{9.4.19}$$

将其代入 (9.4.18) 我们得到：

$$v \begin{bmatrix} D^{\mathrm{T}} & E^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+B & 2C \\ 2C^{\mathrm{T}} & A+B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} \boldsymbol{p} = 0.$$

两边乘以 $\boldsymbol{p}$：

$$v \begin{bmatrix} (D\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}} & (E\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} K^{-1} \begin{bmatrix} D\boldsymbol{p} \\ E\boldsymbol{p} \end{bmatrix} = 0,$$

其中，

$$K = \begin{bmatrix} A+B & 2C \\ 2C^{\mathrm{T}} & A+B \end{bmatrix}.$$

矩阵 K 可视为由二次有限元对下面的常微分方程组近似而得到的刚度矩阵：

$$\begin{aligned} &-u'' + v' + u = 0, \\ &-v'' - u' + v = 0, \\ &u(0) = u(\Theta) = v(0) = v(\Theta) = 0, \end{aligned}$$

因此 K 是正定矩阵，则我们有：

$$\begin{bmatrix} D\boldsymbol{p} \\ E\boldsymbol{p} \end{bmatrix} = 0.$$

直接验证可知矩阵 D 的秩为 m，则 $\boldsymbol{p} = 0$ 是唯一解. 再由 (9.4.19) 即得 $\boldsymbol{u}_r = 0$, $\boldsymbol{u}_\theta = 0$。 ■

由 (9.4.14) 我们有：

$$R_{22}\tilde{\boldsymbol{p}}_h^* = 0,$$

由引理 9.4.1 即得：

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_h^* = 0, \quad \partial_s \tilde{\boldsymbol{p}}_h^* = 0. \tag{9.4.20}$$

则 (9.4.14) 的第一个方程简化为：

$$(A_{11}Q_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Q_{12}^{\mathrm{T}})\partial_s \hat{\boldsymbol{U}}_h^* = R_{11}\hat{\boldsymbol{U}}_h^* \tag{9.4.21}$$

我们求下面形式的解：

$$\hat{\boldsymbol{U}}_h^* = \mathrm{e}^{\sigma s}\boldsymbol{\zeta}.$$

代入到 (9.4.21)，我们得到下面的特征值问题：

$$R_{11}^{-1}(A_{11}Q_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Q_{12}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\zeta} = \lambda\boldsymbol{\zeta}, \tag{9.4.22}$$

其中 $\lambda = 1/\sigma$。

引理 9.4.2 (i) 特征值问题 (9.4.22) 没有形式为 $\alpha\mathrm{i}$ 的特征值，其中 α 是任意实数，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$；(ii) 若 λ 是一个特征值，则 $-\lambda$ 也是一个特征值。

证明 (9.4.22) 式可以写为：

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11}^{\mathrm{T}} & Q_{21}^{\mathrm{T}} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

或者等价地

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix}.$$

令：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_r & \boldsymbol{\xi}_r & \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta & \boldsymbol{\xi}_\theta & \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\mathrm{T}} & Q_{21}^{\mathrm{T}} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} & Q_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta} \\ 0 \end{bmatrix},$$

则：

$$\begin{bmatrix} vA & 0 & 0 & 0 & -D \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & vA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_r \\ \boldsymbol{\xi}_r \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta \\ \boldsymbol{\xi}_\theta \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}$$

$$= \lambda\begin{bmatrix} 0 & v(A+B) & 0 & 2vC & -D \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2vC & 0 & v(A+B) & -E \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ D^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} & 0 & E^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_r \\ \boldsymbol{\xi}_r \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta \\ \boldsymbol{\xi}_\theta \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}.$$

等价地：

$$vA\hat{\boldsymbol{\xi}}_r - D\boldsymbol{\eta} = \lambda v(A+B)\boldsymbol{\xi}_r + 2\lambda vC\boldsymbol{\xi}_\theta - \lambda D\boldsymbol{\eta},$$

$$\boldsymbol{\xi}_r = \lambda\hat{\boldsymbol{\xi}}_r,$$

$$vA\hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta = 2\lambda vC^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_r + \lambda v(A+B)\boldsymbol{\xi}_\theta - \lambda E\boldsymbol{\eta},$$

$$\boldsymbol{\xi}_\theta = \lambda\hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta,$$

$$D^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\xi}}_r + D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_r + E^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_\theta = 0,$$

或

$$\boldsymbol{\xi}_r = \lambda\hat{\boldsymbol{\xi}}_r,\quad \boldsymbol{\xi}_\theta = \lambda\hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta,$$
$$G(\lambda)\widetilde{\boldsymbol{\zeta}} = 0,$$

其中，

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} v\left(\lambda^2(A+B)-A\right) & 2v\lambda^2 C & (1-\lambda)D \\ 2v\lambda^2 C^{\mathrm{T}} & v\left(\lambda^2(A+B)-A\right) & -\lambda E \\ (1+\lambda)D^{\mathrm{T}} & \lambda E^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\zeta}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_r \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}.$$

对任意实数 α,

$$G(\alpha\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} -v\left(\alpha^2(A+B)+A\right) & -2v\alpha^2 C & (1-\alpha\mathrm{i})D \\ -2v\alpha^2 C^{\mathrm{T}} & -v\left(\alpha^2(A+B)+A\right) & -\alpha\mathrm{i}E \\ (1+\alpha\mathrm{i})D^{\mathrm{T}} & \alpha\mathrm{i}E^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}.$$

令：

$$G(\alpha\mathrm{i}) \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_r \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = 0,$$

或

$$K_1 \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_r \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha\mathrm{i})D\boldsymbol{\eta} \\ -\alpha\mathrm{i}E\boldsymbol{\eta} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} (1+\alpha\mathrm{i})D^{\mathrm{T}} & \alpha\mathrm{i}E^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_r \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta \end{bmatrix} = 0,$$

其中，

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} v\left(\alpha^2(A+B)+A\right) & 2v\alpha^2 C \\ 2v\alpha^2 C^{\mathrm{T}} & v\left(\alpha^2(A+B)+A\right) \end{bmatrix} \\ &= v\alpha^2 K + v\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

显然，矩阵 A 对称正定，则 K_1 也是对称正定矩阵。因此我们有：

$$\begin{bmatrix} (1+\alpha\mathrm{i})D^{\mathrm{T}} & \alpha\mathrm{i}E^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} K_1^{-1} \begin{bmatrix} (1-\alpha\mathrm{i})D\boldsymbol{\eta} \\ -\alpha\mathrm{i}E\boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = 0.$$

以 $\boldsymbol{\eta}$ 乘以上式，且令：

$$\boldsymbol{\eta}_* = \begin{bmatrix} (1-\alpha\mathrm{i})D\boldsymbol{\eta} \\ -\alpha\mathrm{i}E\boldsymbol{\eta} \end{bmatrix},$$

我们得到：

$$(\bar{\boldsymbol{\eta}}_*)^{\mathrm{T}} K_1^{-1} \boldsymbol{\eta}_* = 0,$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\eta}}_*$ 是 $\boldsymbol{\eta}_*$ 的共轭。注意到 K_1^{-1} 也是对称正定矩阵，则 $\boldsymbol{\eta}_* = 0$，由此以及 D 的秩为 m 即得 $\boldsymbol{\eta} = 0$。因此 $\hat{\boldsymbol{\xi}}_r = \hat{\boldsymbol{\xi}}_\theta = 0$，则 $G(\alpha\mathrm{i})$ 是非奇异矩阵，$\alpha\mathrm{i}$ 不是 (9.4.22) 的特征值。最后，容易验证 $G(-\lambda) = G^{\mathrm{T}}(\lambda)$。因此，若 λ 是一个特征值，则 $\det(G(-\lambda)) = \det\left(G^{\mathrm{T}}(\lambda)\right) = \det(G(\lambda)) = 0$，即 $-\lambda$ 也是一个特征值。 ■

由引理 9.4.2 可知矩阵 $R_{11}^{-1}(A_{11}Q_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Q_{12}^{\mathrm{T}})$ 没有零特征值，因而是非奇异矩阵，则 (9.4.22) 可以改写为：

$$(A_{11}Q_{11}^{\mathrm{T}} + A_{12}Q_{12}^{\mathrm{T}})^{-1} R_{11}\boldsymbol{\zeta} = \sigma\boldsymbol{\zeta} \tag{9.4.23}$$

其中 $\sigma = \dfrac{1}{\lambda}$。因此我们有下面的定理：

定理 9.4.1 特征值问题 (9.4.22) 有 $2n$ 个实部为正的特征值：$\sigma_1, \sigma_2, \cdots,$ σ_{2n}，以及与其对应的 $2n$ 个特征值：$-\sigma_1, -\sigma_2, \cdots, -\sigma_{2n}$。 ■

假设当 $r \to 0$ 时，$\hat{\boldsymbol{u}}_r^h(r), \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h(r)$ 有界，则由定理 9.4.1，我们得到方程 (9.4.14) 的解：

$$\hat{\boldsymbol{U}}_h^* = \sum_{j=1}^{2n} c_j \mathrm{e}^{\sigma_j s} \boldsymbol{\zeta}_j.$$

问题 (9.4.13) 的解是：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{U}}_h \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_h \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2n} c_j r^{\sigma_j} Q^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_j \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中 $r = \mathrm{e}^s$。令：

$$Q^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\zeta}_j, 0]^{\mathrm{T}} = \left[\hat{\boldsymbol{\xi}}_{r,j}\ \boldsymbol{\xi}_{r,j}\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\theta,j}\ \boldsymbol{\xi}_{\theta,j}\ \boldsymbol{\eta}_j\right]^{\mathrm{T}},$$

则：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_r^h \\ \hat{\boldsymbol{u}}_\theta^h \\ \tilde{\boldsymbol{p}}_h \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2n} c_j r^{\sigma_j} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{r,j} \\ \boldsymbol{\xi}_{\theta,j} \\ \boldsymbol{\eta}_j \end{bmatrix},$$

因此问题 (9.4.9) 的解是：

$$u_r^h(r,\theta)=\sum_{j=1}^{2n}c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{r,j}, \tag{9.4.24}$$

$$u_\theta^h(r,\theta)=\sum_{j=1}^{2n}c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\theta,j}, \tag{9.4.25}$$

$$p_h(r,\theta)=\sum_{j=1}^{2n}c_j r^{\sigma_j-1}\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j. \tag{9.4.26}$$

等式 (9.4.24)~(9.4.26) 即为 Stokes 问题 (9.4.1)~(9.4.3) 的解在奇点附近的渐近展开式的离散形式。

9.4.2　奇异有限元近似

应用解在奇点附近的渐近展开式 (9.4.24)~(9.4.26)，我们考虑问题 (9.4.1)~(9.4.3) 的奇异有限元近似。首先引进指标集：

$$N_r=\{j:\ 1\leqslant j\leqslant 2n,\ \sigma_j\ \ \text{为实数}\},$$
$$N_c=\{j:\ 1\leqslant j\leqslant 2n,\ \sigma_j=a_j+b_j i, b_j>0\}.$$

则对应于 (9.4.24)~(9.4.26) 的实解为：

$$\begin{aligned}
u_r^h(r,\theta)=&\sum_{j\in N_r}c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{r,j}\\
&+\sum_{j\in N_c}c_j r^{a_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\xi}_{r,j}^{*}\cos(b_j\ln r)-\boldsymbol{\xi}_{r,j}'\sin(b_j\ln r)\right)\\
&+\sum_{j\in N_c}d_j r^{a_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\xi}_{r,j}^{*}\sin(b_j\ln r)+\boldsymbol{\xi}_{r,j}'\cos(b_j\ln r)\right),\\
u_\theta^h(r,\theta)=&\sum_{j\in N_r}c_j r^{\sigma_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\theta,j}\\
&+\sum_{j\in N_c}c_j r^{a_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\xi}_{\theta,j}^{*}\cos(b_j\ln r)-\boldsymbol{\xi}_{\theta,j}'\sin(b_j\ln r)\right)\\
&+\sum_{j\in N_c}d_j r^{a_j}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\xi}_{\theta,j}^{*}\sin(b_j\ln r)+\boldsymbol{\xi}_{\theta,j}'\cos(b_j\ln r)\right),\\
p_h(r,\theta)=&\sum_{j\in N_r}c_j r^{\sigma_j-1}\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j\\
&+\sum_{j\in N_c}c_j r^{a_j-1}\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\eta}_j^{*}\cos(b_j\ln r)-\boldsymbol{\eta}_j'\sin(b_j\ln r)\right)\\
&+\sum_{j\in N_c}d_j r^{a_j-1}\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\eta}_j^{*}\sin(b_j\ln r)+\boldsymbol{\eta}_j'\cos(b_j\ln r)\right),
\end{aligned}$$

其中 $[\hat{\boldsymbol{\xi}}^*_{r,j},\boldsymbol{\xi}^*_{r,j},\hat{\boldsymbol{\xi}}^*_{\theta,j},\boldsymbol{\xi}^*_{\theta,j},\boldsymbol{\eta}^*_j]^{\mathrm{T}}$ 和 $[\hat{\boldsymbol{\xi}}'_{r,j},\boldsymbol{\xi}'_{r,j},\hat{\boldsymbol{\xi}}'_{\theta,j},\boldsymbol{\xi}'_{\theta,j},\boldsymbol{\eta}'_j]^{\mathrm{T}}$ 是 $Q^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\zeta}_j,0]^{\mathrm{T}}$ 的实部和虚部。因此：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\approx&\sum_{j\in N_r}c_jr^{\sigma_j}\boldsymbol{f}_j^{(0)}(\theta)\\&+\sum_{j\in N_c}c_jr^{a_j}\left(\boldsymbol{f}_j^{(1)}(\theta)\cos(b_j\ln r)-\boldsymbol{f}_j^{(2)}(\theta)\sin(b_j\ln r)\right)\\&+\sum_{j\in N_c}d_jr^{a_j}\left(\boldsymbol{f}_j^{(1)}(\theta)\sin(b_j\ln r)+\boldsymbol{f}_j^{(2)}(\theta)\cos(b_j\ln r)\right),\end{aligned}\tag{9.4.27}$$

$$\begin{aligned}p\approx&\sum_{j\in N_r}c_jr^{\sigma_j-1}g_j^{(0)}(\theta)\\&+\sum_{j\in N_c}c_jr^{a_j-1}\left(g_j^{(1)}(\theta)\cos(b_j\ln r)-g_j^{(2)}(\theta)\sin(b_j\ln r)\right)\\&+\sum_{j\in N_c}d_jr^{a_j-1}\left(g_j^{(1)}(\theta)\sin(b_j\ln r)+g_j^{(2)}(\theta)\cos(b_j\ln r)\right),\end{aligned}\tag{9.4.28}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}_j^{(0)}(\theta)=T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{r,j}\\\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\theta,j}\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix},\\&\boldsymbol{f}_j^{(1)}(\theta)=T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}^*_{r,j}\\\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}^*_{\theta,j}\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{f}_j^{(2)}(\theta)=T\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}'_{r,j}\\\boldsymbol{\psi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}'_{\theta,j}\end{bmatrix},\\&g_j^{(0)}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_j,\ g_j^{(1)}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}^*_j,\ g_j^{(2)}(\theta)=\boldsymbol{\phi}(\theta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}'_j.\end{aligned}$$

在 (9.4.27)~(9.4.28) 中取 σ_j 和 a_k 使得 σ_j，$a_k\in(0,2]$，假设它们构成集合 $\{\sigma_j\}_1^{M_1}$ 和 $\{a_k\}_1^{M_2}$。我们构造下面的奇异有限元空间：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_1^h=\mathrm{Span}\{&\eta(r,\theta)r^{\sigma_j}\boldsymbol{f}_j^{(0)}(\theta),\ \eta(r,\theta)r^{a_k}\\&\cdot(\boldsymbol{f}_k^{(1)}(\theta)\cos(b_k\ln r)-\boldsymbol{f}_k^{(2)}(\theta)\sin(b_k\ln r)),\\&\eta(r,\theta)r^{a_k}(\boldsymbol{f}_k^{(1)}(\theta)\sin(b_k\ln r)+\boldsymbol{f}_k^{(2)}(\theta)\cos(b_k\ln r)),\\&j=1,\cdots,M_1;k=1,2,\cdots,M_2\},\\Q_1^h=\mathrm{Span}\{&r^{\sigma_j-1}g_j^{(0)}(\theta),\ r^{a_k-1}\\&\cdot(g_k^{(1)}(\theta)\cos(b_k\ln r)-g_k^{(2)}(\theta)\sin(b_k\ln r)),\\&r^{a_k-1}(g_k^{(1)}(\theta)\sin(b_k\ln r)+g_k^{(2)}(\theta)\cos(b_k\ln r)),\\&j=1,2,\cdots,M_1;k=1,2,\cdots,M_2\},\end{aligned}$$

其中 $\eta(r,\theta)$ 是在原点为 1，边界 $\partial\Omega$ 为 0 的任意切断函数。令：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}_h=\{\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}):\ \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{S}_0^h\oplus \boldsymbol{S}_1^h,\ \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}_s)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_s),\ \forall s\in N_b\},\\
&\boldsymbol{V}_h=\{\boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}):\ \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{S}_0^h\oplus \boldsymbol{S}_1^h,\ \boldsymbol{v}_h(\boldsymbol{x}_s)=\boldsymbol{0},\ \forall s\in N_b\}\subset \left(H_0^1(\Omega)\right)^2,\\
&M_h=\left(Q_0^h\oplus Q_1^h\right)\cap L_0^2(\Omega)
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{S}_0^h=(\{v(\boldsymbol{x})\in C(\Omega):\ v|_K \text{ 是二次多项式}\})^2\\
&Q_0^h=\{q(\boldsymbol{x})\in C(\Omega):\ q|_K \text{ 是一次多项式}\}
\end{aligned}$$

是标准的有限元空间。由此，我们得到 Stokes 问题 (9.4.1)~(9.4.3) 的奇异有限元近似：

$$\begin{cases}
\text{找 } (\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}),\ p_h(\boldsymbol{x}))\in \boldsymbol{U}_h\times M_h \text{ 使}\\
a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)-b(\boldsymbol{v}_h,p_h)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h),\qquad \forall \boldsymbol{v}_h\in \boldsymbol{V}_h,\\
b(\boldsymbol{u}_h,w_h)=0,\qquad \forall w_h\in M_h,
\end{cases}\tag{9.4.29}$$

其中，

$$a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=v\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}_h\nabla\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad b(\boldsymbol{u}_h,w_h)=\int_\Omega w_h\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

附注　本章的内容可参阅下列文献：Wu and Han (1997)；Wu and Han (2001)；Wu and Xue (2003)；Wu and Cheung (1999)；Wu and Jin (2005)。应用人工边界方法处理带奇点二阶椭圆偏微分方程边值问题和交界面问题的其他相关工作，可参阅论文 Han (1982)；Yu (1983-B)；Han and Huang (1999-A)。人工边界方法已成功地应用于线性弹性断裂力学中各种问题应力强度因子的计算，有兴趣的读者可进一步参阅论文 Babuška and Oh (1990)；Babuška and Rosenzweig (1972)；Fix, Gulati and Wakoff (1973)；Givoli and Rivkin (1993)；Givoli and Vigdergauz (1994)；Guo and Oh (1994)；Kellogg (1971，1975)；Li, Mathon and Sermer (1987)；Han and Huang (1999-B)；Han, Huang and Bao (2000)；Bao, Han and Huang (2001)；Han and Huang (2001-A)；Tsamasphyros (1987)。

参 考 文 献

[1] Abdallah, N.B. and Pinaud, O. (2002), *A mathematical model for the transient evolution of a resonant tunnelling diode*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 334(2002), 283-288.

[2] Adams, R.A. (1975), *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] Alpert, B., Greengard, L. and Hagstrom, T. (2002), *Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent wave equations*, J. Comput. Phys., 180(2002), 270-296.

[4] Anderson, T.L. (1995), *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications.* (2nd ed.). CRC Press, Boca Raton, 1995.

[5] Andrews, L.C. (1992), *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*, New York : McGraw-Hill, 1992.

[6] Antoine, X. and Besse, C. (2003), *Unconditionally stable discretization schemes of non-reflecting boundary conditions for the one-dimensional Schrödinger equation*, J. Comput. Phys. 188 (2003), 157-175.

[7] Antoine, X., Besse, C. and Descombes, S.(2006), *Artificial boundary conditions for one-dimensional cubic Schrödinger equations*, SIAM J. Numer. Anal., 43(2006), 2272-2293.

[8] Arfken, G. (1985), *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed. Academic Press, Orlando, 1985, 875-876.

[9] Arnold, A. (1998), *Numerical absorbing boundary conditions for quantum evolution equations*, VLSI Design, 6(1998), 313-319.

[10] Arnold, A. (2001), *Mathematical concepts of open quantum boundary conditions*, Transp, Theory Stat. Phys., 30(2001), 561-584.

[11] Arnold, A., Ehrhardt, M. and Sofronov, I. (2003), *Discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation : Fast calculation, approximation, and stability*, Commun. Math. Sci. 1 (2003), 501-556.

[12] Baskakov, V.A. and Popov, A.V. (1991), *Implementation of transparent boundaries for numerical solution of the Schrödinger equation*, Wave Motion 14 (1991), 123-128.

[13] Babuška, I. and Oh, H.S. (1990), *The p-version of the finite element method for domains with corners and for infinite domains*, Numer. Meth. PDEs, 6(1990), 371-392.

[14] Babuška, I. and Rosenzweig, M.R. (1972), *A finite element scheme for domains with corners*, Numer. Math., 20(1972), 1-21.

[15] Bao, W.Z. (1998), *The approximations of the exact boundary condition at an artificial boundary for linearized incompressible viscous flows*, J. Comput. Math. 16(1998), 239-256.

[16] Bao, W.Z. (2000), *Artificial boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations: A well-posed result*, Comput. Methods. Appl. Meth. Engrg., 188(2000), 595-611.

[17] Bao, W.Z. and Han, H.D. (1996), *Nonlocal artificial boundary conditions for the incom-*

pressible viscous flow in a channel using spectral techniques, J. Comp. Phy., 126(1996), 52-63.

[18] Bao, W.Z. and Han, H.D. (1997), *Local artificial boundary conditions for the incompressible viscous flow in a slip channel*, J. Comp. Math., 15(1997), 335-343.

[19] Bao, W.Z. and Han, H.D. (1999), *The direct method of lines for the problem of infinite elastic foundation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 175(1999), 157-173.

[20] Bao, W.Z. and Han, H.D. (2000), *High-order local artificial boundary conditions for problems in unbounded domains*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 188 (2000), 455-471.

[21] Bao, W.Z. and Han, H.D. (2003), *Error bounds for the finite element approximation of an incompressible material in an unbounded domain*, Numer. Math., 93(2003), 415-444.

[22] Bao, W.Z., Han, H.D. and Huang, Z.Y. (2001), *Numerical simulations of fracture problems by coupling the FEM and the direct method of lines*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190 (2001), 4831-4846.

[23] Benporat, G. and Givoli, D. (1995), *Solution of unbounded domain problems using elliptic artificial boundaries*, Com. in Numer. Meth. in Engrg., 11 (1995), 735-741.

[24] Boutet de Monvel, A., Fokas, A.S. and Shepelsky, D. (2003), *Analysis of the global relation for the nonlinear Schrödinger equation on the half-line*, Lett. Phys. 65(2003), 199-212.

[25] Brenner, S.C. and Scott, L.R. (1994), *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, 1994.

[26] Bryson, S. and Levy, D. (2003), *Central schemes for multidimensional Hamilton-Jacobi equations*, SIAM. J. Sci. Comput., 25 (2003), 767-791.

[27] Burgers, M.J. (1948), *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Adv. Appl. Mech., 1(1948), 171-199.

[28] Carslaw, H.S. and Jaeqer, J.C. (1959), *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.

[29] Chen, G. and Zhou, J. (1992), *Boundary Element Methods,* Academic Press Limited, 1992.

[30] Ciarlet, P.G. (1977), *The Finite Element Method for Elliptic Problems,* North-Holland, 1977.

[31] Collino, F. (1993). *High order absorbing boundary conditions for wave propagation models. Straight line boundary and corner cases,* in: R. Kleinman, et al. (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, SIAM, Delaware, 1993, pp. 161-171.

[32] Colton, D. and Kress, R. (1983), *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons., 1983.

[33] Costabel, M. (1987), *Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements*, in Boundary Elements IX edited by Brebbia C.A. et al., Springer-Verlag, 1987.

[34] Du, Q. and Wu, X.N. (1999), *Numerical solution for the three-dimensional Ginzberg-Laudau models using artificial boundary*, SIAM J. Numer. Anal., 36(1999), 1482-1506.

[35] Erdélyi, A. (1954) *Tables of Integral Transforms*, Vol II, McGraw-Hill, 1954.

[36] Engquist, B. and Majda, A. (1977), *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comp. 31 (1977), 629-651.

[37] Evans, L.C. (1998), *Partial Dfferential Equations*, American Mathematical Society, Providence R.I. 1998.

[38] Feng, K. (1980), *Differential vs. integral equations and finite vs. infinite elements*, Math. Numer. Sinica, 2 (1980), 100-195.

[39] Feng, K. (1982), *Canonical boundary reduction and finite element method*, Proceedings of International Invitational Symposium on the Finite Element Method (1981, Hefei), Science Press, Beijing, 1982.

[40] Feng, K. (1983), *Finite element method and natural boundary reduction*, Procedings of the International Congress of Mathematicians (1983, Warszawa), 1439-1453.

[41] Feng, K. (1984), *Asymptotic rediation conditions for reduced wave equation*, J. Comput. Math. 2(1984), 130-138.

[42] Feng, K. and Yu, D.H. (1983), *Canonical integral equations of elliptic boundary value problems on the finite element method*, Proceedings of International Invitational Symposium on the Finite Element Method (1982, Beijing), Science Press, Beijing, 1983, 211-252.

[43] Fevens, T. and Jiang, H. (1999), *Absorbing boundary conditions for the Schrödinger equation*. SIAM J. Sci. Comput., 21 (1999), 255-282.

[44] Fix, G., Gulati, S. and Wakoff, G.I. (1973), *On the use of singular functions with the finite element method*, J. Comp. Phys., 13 (1973), 209-228.

[45] Gatica, G.N., Gatica, L.F. and Stephan, E.P. (2003), *A FEM-DtM formulation for a non-linear exterior problem in incompressible elasticity*, Math. Meth. Appl. Sci., 26(2003), 151-170.

[46] Gilbarg, D. and Trudinger, N.S. (1977), *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.

[47] Girault, V. and Raviart, P.A. (1981), *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Springer, 1981.

[48] Givoli, D. (1992), *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains*, Elsevier, Amsterdam, 1992.

[49] Givoli, D. (2004), *High order local non-reflecting boundary conditions: a review*, Wave Motion, 39(2004), 319-326.

[50] Givoli, D. and Keller, J.B. (1989), *A finite element method for large domains*, Comput. Methods. Appl. Meth. Engrg., 76(1989), 41-66.

[51] Givoli, D. and Keller, J.B. (1990), *Nonreflecting boundary conditions for elastic waves*, Wave Motion, 12(1990), 261-279.

[52] Givoli, D. and Keller, J.B. (1994), *Special finite elements for use with high-order boundary conditions*, Comput. Methods. Appl. Meth. Engrg., 119(1994), 199-213.

[53] Givoli, D., Patlashenko, I. and Keller, J.B. (1997), *High-order boundary conditions and finite elements for infinite domains*, Comput. Methods. Appl. Meth. Engrg., 143(1997), 13-39.

[54] Givoli, D. and Rivkin, L. (1993), *The DtN finite element method for elastic domains with cracks and re-entrant corners*, Computers & Structures, 49 (1993), 633-642.

[55] Givoli, D. and Vigdergauz, S. (1994), *Finite element analysis of wave scattering from singularities*, Wave Motion, 20 (1994), 165-176.

[56] Goldstein, C.I. (1982), *A finite element method for solving Helmholtz type equations in waveguides and other unbounded domains*, Math. Comput., 39(1982), 309-324.

[57] Gradshteyn, I.S. and Kyzhik, I.M. (1980), *Tables of Integrals, Series and Products*, the 4th Edition, Academic Press, 1980.

[58] Greengard, L. and Lin, P. (1998), *On the numerical solution of the heat equation in unbounded domains (Part I)*, Tech. Note 98-002, Courant Mathematics and Computing Laboratory, New York University, 1998.

[59] Grote, M.J. and Keller, J.B. (1995), *Exact nonreflection boundary conditions for the time dependent wave equation*, SIAM J.Appl. Math., 55 (1995), 280-297.

[60] Grote, M.J. and Keller, J.B. (2000), *Exact nonreflection boundary condition for elastic wave*, SIAM J.Appl. Math., 60 (2000), 803-817.

[61] Guo, B. and Oh, H.S. (1994), *The h-p version of the finite element method for problems with interfaces*, Inter. J. Numer. Meth. Eng., 37 (1994), 1741-1762.

[62] Hagstrom, T., Haraharan, S.I. and Thompson, D. (2003), *High-order radiation boundary conditions for the convective wave equation in exterior domains*, SIAM J. Sci. Comput., 25(2003), 1088-1101.

[63] Hagstrom, T. and Keller, H.B. (1986), *Exact boundary conditions at an artificial boundary for partial differential equations in cylinders*, SIAM J. Math. Anal., 17(1986), 322-341.

[64] Hagstrom, T. and Keller, H.B. (1987), *Asymptotic boundary conditions and numerical methods for nonlinear elliptic problems on unbounded domains*, Math. Comput., 48(1987), 449-470.

[65] Halpern, L. and Schatzman, M. (1989), *Artificial boundary conditions for incompressible viscous flows*, SIAM J. Math. Anal., 20(1989), 308-353.

[66] Han, H.D. (1982), *The numerical solutions of interface problems by infinite element method.* Numer. Math., 39 (1982), 39-50.

[67] Han, H.D. (1985), *The mixed finite element method for Stokes equations on unbounded domains*, Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press, Beijing, China, 1985, 206-211.

[68] Han, H.D. (1988), *Boundary integro-differential equations of elliptic boundary value problems and their numerical solutions*, Scientia Sinica, Vol. 31 (1988), 1153-1165.

[69] Han, H.D. (1990), *A new class of variational formulations for the coupling of finite and boundary element methods*, J. Comp. Mathe., 8 (1990), 223-232.

[70] Han, H.D. (1993), *The boundary integro-differential equations of boundary value problems in linear elasticity*, J. Tsinghua Univ., 36 (1993), 15-25.

[71] Han, H.D. (1994-A), *The boundary integro-differential equations of three dimensional Neumann problem in linear elasticity*, Numer. Math., 68(1994), 269-291.

[72] Han, H.D. (1994-B), *A boundary element procedure for the Signorini problem in three dimensional elasticity*, Numer. Math. (a journal of chinese universities), 7 (1994), 104-117.

[73] Han, H.D. (1995), *A system of boundary integro-differential equations for harmonic*

elastic waves in R^3, Numer. Math. (a journal of chinese universities), 4 (1995), 203-621.

[74] Han, H.D. (2005), *The artificial boundary method — numerical solutions of partial differential equations on unbounded domains*, in Frontiers and Prospects of Contemporary Applied Mathematics edited by T. Li and P. Zhang, Higher Education Press, World Scientific, (2005), 33-58.

[75] Han, H.D. and Bao, W.Z. (1995-A), *The artificial boundary conditions for incompressible viscous flow in channels*, Lecture Noteu in Num. Appl. Anal., No. 14 (1995), 47-57.

[76] Han, H.D. and Bao, W.Z. (1995-B), *An artificial boundary condition for the incompressible viscous flows in a no-slip channel*, J. of Comp. Math., 13 (1995), 51-63.

[77] Han, H.D. and Bao, W.Z. (1996), *An artificial boundary condition for two-dimensional incompressible viscous flows using the method of lines*, Int. J. Numer.l Meth. Fluids, 22 (1996), 483-493.

[78] Han, H.D. and Bao, W.Z. (1997), *The artificial boundary conditions for incompressible materials on an unbounded domain*, Numer. Math., 77 (1997), 347-363.

[79] Han, H.D. and Bao, W.Z. (1999), *The discrete artificial boundary condition on a polygonal artificial boundary for the exterior problem of Poisson equation by using the direct method of lines*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 179(1999), 345-360.

[80] Han, H.D. and Bao, W.Z. (2000), *Error estimates for the finite element approximation of problems in unbounded domains*, SIAM J. Numer. Anal., 37 (2000), 1101-1119.

[81] Han, H.D. and Bao, W.Z. (2001), *Error estimates for the finite element approximation of linear elastic equations in an unbounded domain*, Math. Comp., 70 (2001), 1437-1459.

[82] Han, H.D., Bao, W.Z. and Wang, T. (1997), *Numerical simulation for the problem of infinite elastic foundation*, Comp. Meth. Appl. Mech. and Engrg, 147 (1997), 369-385.

[83] Han H.D., He, C.H. and Wu, X.N. (2000), *Analysis of artificial boundary conditions for exterior boundary value problems in three dimensions*, Numer. Math., 85 (2000), 367-386.

[84] Han, H.D. and Huang, Z.Y. (1999-A), *The direct method of lines for the numerical solutions of interface problem*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 171 (1999), 61-75.

[85] Han, H.D. and Huang, Z.Y. (1999-B), *A semi-discrete numerical procedure for composite material problems*, Math. Sci. Appl., 12 (1999), Advances in numerical mathematics, 35-44.

[86] Han, H.D. and Huang, Z.Y. (2001-A), *The discrete method of separation of variables for composite material problems*, Int. J. Fracture, 112 (2001) 379-402.

[87] Han, H.D. and Huang, Z.Y. (2001-B), *The direct method of lines for incompressible material problems on polygon domains*, 12th International Conference Domain Decomposition Methods, Editors: Tony Chan, Takashi Kako, Hideo Kawarada, Olvier Pironneau, (2001), 125-132.

[88] Han, H.D. and Huang, Z.Y. (2002-A), *A class of artificial boundary conditions for heat equation in unbounded domains*, Comput. Math. Appl., 43 (2002), 889-900.

[89] Han, H.D. and Huang, Z.Y. (2002-B), *Exact and approximating boundary conditions for the parabolic problems on unbounded domains*, Comput. Math. Appl., 44 (2002),

655-666.

[90] Han, H.D. and Huang, Z.Y. (2004), *Exact artificial boundary conditions for Schrödinger equation in* R^2, Commun. Math. Sci., 2(2004), 79-94.

[91] Han, H.D., Huang, Z.Y. and Bao, W.Z. (2000), *The discrete method of separation of variables for computation of stress intensity factors*, Chinese J. Comput. Phy., 17 (2000), 483-496.

[92] Han, H.D., Huang, Z.Y. and Yin, D,S, (2008), Exact artificial boundary conditions for quasilinear elliptic equation in unbounded domain, Commun. Math. Sci. 6 (2008), 71-83.

[93] Han, H.D., Jin, J.C., and Wu, X.N. (2005), *A Finite-difference method for the one-dimensional time-dependent Schrodinger equation on unbounded domain*, Comput. Math. Appl., 50(2005), 1345-1362.

[94] Han, H.D., Lu, J.F. and Bao, W.Z. (1994), *A discrete artificial boundary condition for steady incompressible viscous flows in a no-slip channel using a fast iterative method*, J. Comp. Phy., 114 (1994), 201-308.

[95] Han, H.D. and Wen, X. (2001), *The local artificial boundary conditions for numerical simulations of the flow around a submerged body*, J. of Sci. Comp.n, 16 (2001), 263-286.

[96] Han, H.D. and Wen, X. (2003), *The global artificial boundary conditions for numerical simulations of the 3D flow around a submerged body*, J. Comp. Math., 21(2003), 435-450.

[97] Han, H.D. and Wen, X. (2004), *The artificial boundary conditions for numerical simulations of the complex amplitude in a coupled bay-river system*, J. Comp. Math., 22(2004), 407-426.

[98] Han, H.D. and Wen, X. (2005), *The global artificial boundary conditions for numerical simulations of the flow around a submerged body*, Comput. Math. Appl., 50(2005), 1499-1512.

[99] Han, H.D. and Wu, X.N. (1985-A), *Approximation of infinite boundary condition and its application to finite element methods*, J. Comp. Math., 3(1985), 179-192.

[100] Han, H.D. and Wu, X.N. (1985-B), *The mixed finite element method for Stokes equations on unbounded domains*, J. Sys. Sci. Math. Sci., 5 (1985), 121-132.

[101] Han, H.D. and Wu, X.N. (1992), *The approximation of the exact boundary conditions at an artificial boundary for linear elastic equations and its application*, Math. Comp., 59 (1992), 21-37.

[102] Han, H.D. and Wu, X.N. (2003), *A fast numerical method for the Black-Scholes equation of American options*, SIAM J. Numer. Anal., 41(2003), 2081-2095.

[103] Han, H.D., Wu X.N. and Xu, Z.L. (2006), *Artificial boundary method for Burgers' equation using nonlinear boundary conditions*, J. Comput. Math. 24 (3) 2006, 295-304.

[104] Han, H.D. and Yin, D.S. (2005), *Numerical solutions of parabolic problems on unbounded 3-D spayial domain*, J. Comp. Math., 23(2005), 449-462.

[105] Han H.D. and Yin D.S. (2007), *Absorbing boundary conditions for multidimensional Klein Gordon equation.* Communications in Mathematical Science 5(3)(2007), 743-764.

[106] Han, H.D., Yin, D.S. and Huang Z.Y. (2007), *Numerical solutions of Schrödinger equations in* R^3. Numerical Methods for Patial Differential Equations 23(3) (2007), 511-

533.

[107] Han, H.D. and Ying, L.A. (1979), *An iterative method in the infinite element*, Math. Numer. Sinica, 1 (1979), 91-99.

[108] Han, H.D. and Ying, L.A., (1980), *Large elements and the local finite element method*, Acta Math. Appl. Sinica, 3(1980), 237-249.

[109] Han, H.D. and Zhang, Z.W. (2009), *An anlysis of the finite difference method for one-dimensional Klein-Gordon equation on unbounded domain*, Appl. Numer. Math. 59(2009), 1568-1583.

[110] Han, H.D. and Zheng, C.X. (1999), *High-order local artificial boundary conditions of the exterior problem of Poisson equations in 3-D space*, Numer. Math. (a journal of chinese universities), 23(1999), 290-304.

[111] Han, H.D. and Zheng, C.X. (2002-A), *Mixed Finite Element Method and Higher-order Local artificial boundary conditions for exterior 3-D Poisson equation*, Tsinghua Science and Technology, 7 (2002), 228-234.

[112] Han, H.D. and Zheng, C.X. (2002-B), *Mixed finite element and high-order local artificial boundary conditions of elliptic equation*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 191 (2002), 2011-2027.

[113] Han, H.D. and Zheng, C.X. (2003), *Exact nonreflecting boundary conditions for acoustic problem in three dimensions*, J. Comp. Math., 21(2003), 15-24.

[114] Han, H.D. and Zheng, C.X. (2005-A), *Exact nonreflecting boundary conditions for exterior problems of the hyperbolic equation*, Chinese J. Comp. Phy., 22(2005), 95-107.

[115] Han, H.D. and Zheng, C.X. (2005-B), *Artificial boundary method for the three-dimensional exterior problem of elasticity*, J. Comp. Math., 23(2005), 603-618.

[116] Han, H.D., Zhu, L., Brunner, H. and Ma, J.T. (2005), *The numerical solution of parabolic Volterra integro-differencial equations on unbounded spatial domain*, Appl. Numer. Math., 55(2005), 83-99.

[117] Han HD, Zhu L, Brunner H and Ma J.T. (2006), *Artificial boundary conditions for parabolic Volterra integro-differential equations on unbounded two-dimensional domains*, Journal of computational and Applied Mathematics 197(2006), 406-420.

[118] Happel, J. and Brenner, H. (1983), Low Reynolds Number Hydrodynamics, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague/ Boston/ Lancaster, 1983.

[119] Harari, I. and Hughes, T.J.R. (1992), Analysis of continuous formulations underlying the computation of time-harmonic accoutstic in exterior domains, Comput. Method Appl. Mech. Engrg. 97(1992), 103-124.

[120] Hellums, J.R. and Frensley, W.R. (1994), *Non-Markovian open-system boundary conditions for the time dependent Schrödinger equation*, Phys. Rev. B 49 (1994), 2904-2906.

[121] Hendry, J.A. and Delves, L.M. (1979), *Global element method applied to a harmonic mixed boundary value problem*, J. Comp. Phys., 33 (1979), 33-44.

[122] Huang, H.Y. and Yu, D.H. (2006), *Natural boundary element method for three dimensional exterior harmonic problem with an inner prolate spheroid boundary*, J. Comput. Math. 24 (2006), 193-208.

[123] Jiang, S.D. and Greengard, L. (2004), *Fast evaluation of nonreflecting boundary conditions for the Schrödinger equations in one dimension*, Comput. Math. Appl., 47(2004),

955-966.

[124] Johnson, C. and Nedelec, J.C. (1980), *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, Math. Comp., 35(1980), 1063-1079.

[125] Jones, D.S. (1986), Acoustic and Electromagnetic Waves, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[126] Kardar, M., Parisi, G. and Zhang, Y.C. (1986), *Dynamic scaling of growing interfaces*, Phys. Rev. Lett., 56(1986), 889–892.

[127] Karp, S.N. and Karal, F.C. Jr. (1962), *The elastic-field behaviour in the neighbourhood of a crack of arbitrary angle*, Comm. Pure Appl. Math., 15 (1962), 413-421.

[128] Keller, J.B. and Givoli, D. (1989), *Exact nonreflecting boundary conditions*, J. Comput. Phys., 82(1989) 172-192.

[129] Kellogg, R.B. (1971), *singularities in interface problems*, in: B. Huffard, ed., Numerical Solution of Partial Differential Equations 2 (Academic Press, New York, 1971).

[130] Kellogg, R.B. (1975), *On the Poisson equation with intersecting interfaces*, Appl. Anal., 4 (1975), 101-129.

[131] Koyama, D. (2007), *Error estimates of DtN finite element method for exterior Helmholtz problem*, J. Comput. Appl. Math. 200(2007), 21-31.

[132] Kupradze, V.D. (1979), *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Thoery of Elasticity and Themoelasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[133] Kythe, P.K. (1996), *Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications*, Birkhäuser, Boston, Basel, 1996.

[134] Li, Z.C., Mathon, R. and Sermer, P. (1987), *Boundary method for solving elliptic problems with singularities and interfaces,* SIAM J. of Numer. Anal. 24 (1987), 487-498.

[135] Li, Z.P. and Wu, X.N. (2004), *Multi-atomic Young measure and artificial boundary in approximation of micromagnetics*, Appl. Numer. Math., 51(2004), 69-88.

[136] Lions, J.L. (1971), *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1971.

[137] Lions, P.L. (1988), *On the Schwarz alternating method I*, First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations proceedings, 1-42, SIAM, Philadelphia, 1988.

[138] Mayfield, B. (1989), *Non-local boundary conditions for the Schrödinger equation*, Ph.D. Thesis, University of Rhode Island, Providence, RI, 1989.

[139] Meddahi, S., Gonzalez, M. and Perez, P. (2000), *On a FEM-BEM formulation for an exterior quasilinear problem in the plane*, SIAM J. Numer. Anal., 37(2000), 1820-1837.

[140] Morton, K.W. and Mayers, D.F. (2005), *Numerical Solution of Partial differential Equations : an introduction*, Cambrige, UK; New York : Cambrige Press, 2005.

[141] Muth, E.J. (1977), *Transform Methods with Applications to Engineering and Operations Research*, Prentice-Hill Inc., 1977.

[142] Nataf, F. (1989), *An open boundary condition for the computation of the steady incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comp. Phy., 85(1989), 104-129.

[143] Nedelec, J.C. (2001), *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems*, Springer, 2001.

[144] Oleinik, O.A. (1987), *On the behavior at infinity of solutions of second order elliptic equations*, In Ordinary and Partial Differential Equations. (Dundee, 1986), Pitman Res. Notes Math. Ser. 157, Longman Sci. Tech., Harlow.

[145] Oh, H.S. and Babuška, I. (1992), *The p-version of the finite element method for the elliptic boundary value problems with interfaces*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 97 (1992), 211-231.

[146] Schädle, A. (2002), *Non-reflecting boundary conditions for the two-dimensional Schrödinger equation*, Wave Motion 35 (2002), 181-188.

[147] Schmidt, F. and Yevick, D. (1997), *Discrete boundary conditions for Schrödinger equation*, J. Comput. Phys. 134 (1997), 96-107.

[148] Sokolnikoff, I.S. (1983), *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1983.

[149] Strain, J.M. (1992), *Fast adaptive methods for the free-space heat equation*, SIAM J. Sci. Comp. 15 (1992), 185-206.

[150] Sun, Z.Z and Wu, X.N. (2006), *The stability and convergence of a difference scheme for the Schrodinger equation on an infinite domain by using artifial boundary conditions,* J. Comp. Phy., 214(2006), 209-223.

[151] Szeftel, J. (2006-A), Absorbing boundary conditions for one-dimentional nonlinear Schrödinger equations. Numer. Math. 104(2006), 103-127.

[152] Szeftel, J. (2006-B), *Absorbing boundary conditions for nonlinear scalar partial differential equations, Comput.* Methods Appl. Mech. Engrg., 195(2006), 3760-3775.

[153] Teng, Z.H. (2003), *Exact boundary condition for time-depandent wave equation based on integral equation*, J. Comp. Phy., 190(2003), 398-418.

[154] Thatcher, R.W. (1976), *The use of infinite grid refinements at singularities in the solution of Laplace's equation*, Numer. Math., 25 (1976), 163-178.

[155] Tsamasphyros, G. (1987), *Singular element construction using a mapping technique*, Inter. J. Numer. Meth. Eng., 24 (1987), 1305-1316.

[156] Ushijima, T. (2001), *An FEM-CSM combined method for planar exterior Laplace problems*, Japan J. Indust. Appl. Math, 18 (2001), 359-382.

[157] Wu,J.M. and Yu,D.H. (2000), *The natural boundary element method for exterior elliptic domain*, Chinese J. Numer. Math. & AppL. 22(2000), 91-104.

[158] Wu, X.N. and Cheung, C.Y. (1999), *An Iteration method using artificial boundary for some elliptic boundary value problems with singularities,* Int. J. Numer. Meth. Engng., 46 (1999), 1917-1931.

[159] Wu, X.N. and Han, H.D. (1997), *A finite-element method for Laplace and Helmholtz type boundary value problems with singularities*, SIAM, L. Numer. Anal.,Vol.34 (1997), 1037-1050.

[160] Wu, X.N. and Han, H.D. (2001), *Discrete boundary conditions for problems with interface*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 190 (2001), 4987-4998.

[161] Wu, X.N. and Jin, J.C. (2005), *A finite element method for Stokes equations using discrete singularity expansion*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 194(2005), 83-101.

[162] Wu, X.N. and Sun, Z.Z. (2004), *Convergence of difference scheme for heat equation in unbounded domains using artificial boundary conditions*, Appl. Numer. Math., 50 (2004), 261-277.

[163] Wu, X.N. and Xue, W.M. (2003), *Discrete boundary conditions for elasticity problems with singularities*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 192 (2003), 3777-3795.

[164] Xanthis, L.S. and Schwab, C. (1991) *The method of arbitrary lines*, CR Acad. Sci. Paris. Sèr. I 312 (1991), 181-187.

[165] Xu, Z.L. and Han, H.D. (2006), *Absorbing boundary conditions for nonlinear Schrödinger equations*, Physical Review E 74, 2006: Art. No. 037704 Part 2.

[166] Xu, Z.L., Han, H.D. and Wu, X.N. (2006), *Numerical method for the deterministic Kardar-Parisi-Zhang equation in unbounded domains*, Communications in Computational Physics 1(3) 2006, 481-495.

[167] Xu, Z.L., Han, H.D. and Wu, X.N. (2007), *Adaptive absorbing boundary conditions of Schrödinger-type equations: Application to nonlinear and multi-dimensiomal problems*, J. Comput. Phys. 225(2007), 1577-1589.

[168] Ying, L.A. (1977), *The infinite similar element menthod for calculation stress intensity factors*, Scientia Sinica, 6 (1977), 517-535.

[169] Ying, L.A. and Han, H.D. (1980), *The infinite element method for unbounded regions and in-homogeneous problems*, Acta Math. Sinica, Vol. 23 (1980), 118-127.

[170] Yosibash, Z. and Szabo, B.A. (1995), *Generalized stress intensity factors in linear elastostatics*, Int. J. Fracture, 72 (1995), 223-240.

[171] Yu, D.H. (1982), *Canonical integral equations of biharmonic elliptic boundary value problems*, Math. Numer. Sinica, 4(1982), 330-336.

[172] Yu, D.H. (1983), *Numerical solutions of harmonic and biharmonic canonical integral equations in interior or exterior circular domains*, J. Comp. Math., 1(1983), 52-62.

[173] Yu, D.H. (1983), *Coupling canonical boundary element metdod with FEM to solve harmonic problem over cracked domain*, J. Comp. Math., 1(1983), 195-202.

[174] Yu, D.H. (1985), *Approximation of boundary conditions at infinity for a harmonic equation*, J. Comp. Math., 3(1985), 219-227.

[175] Yu, D.H. (1986-A), *Canonical integral equations of Stokes problem*, J. Comp. Math., 4(1986), 62-73.

[176] Yu, D.H. (1986-B), *A system of plane elasticity canonical integral equations and its application*, J. Comp. Math., 4 (1986), 200-211.

[177] Yu, D.H. (1992), *The coupling of natural BEM and FEM for Stokes problem on unbounded domain*, Math. Numer. Sinica, 14 (1992), 371-378.

[178] Yu, D.H. (1994-A), *A domain decomposition method based on natural boundary reduction over unbounded domain*, Math. Numer. Sinica 16 (1994), 448-459.

[179] Yu, D.H. (1994-B), *The computation of hypersingulars integrals on circle and its error estimates*, Numer. Math. J. Chinese Univ., 16 (1994), 332-337.

[180] Yu, D.H. (2002), *Natural Bounray Method and Its Applications*, Kluwer Academic Publishes and Science Press, 2002.

[181] Zhang, Y.T. and Shu, C.W. (2003), *High-oder WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations on triangular meshes*, SIAM. J.Sci. Comput., 24 (2003), 1005-1030.

[182] Zheng, C.X.(2006-A), *Exact nonreflecting boundary conditions for one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equations*, J. Comput. Phys., 215: 552-565, 2006.

[183] Zheng, C.X.(2006-B), *Numerical simulation of a modified KdV equation on the whole*

real axis, Numer. Math., 105: 315-335, 2006.

[184] Zheng,C.X. (2007), *Numerical solution to the sine-Gordon equation defined on the whole real axis*, SIAM J. Sci. Comp., 29(6): 2494-2506, 2007.

[185] Zheng, C.X. and Han, H.D. (2002-A), *High-order artificial boundary conditions for ideal axisymmetric irrotational flow around 3D obstacles*, Int. J. of Numer. Meth. Engrg, 54 (2002), 1195-1208.

[186] Zheng, C.X. and Han, H.D. (2002-B), *The artificial boundary condition for exterior Oseen equation in 2-D space*, J. Comp. Math., 20 (2002), 591-598.

[187] Zheng, C.X. and Han, H.D. (2003), *Artificial boundary method for exterior Stokes flow in three dimensions*, Int. J. of Numer. Meth. Fluids, 41 (2003), 537-549.

[188] Zheng, C.X., Wen, X. and Han,H. D. *Numerical solution to a linearized KdV equation on unbounded domain*, to appear in Numer. Meth. PDE. 24(2008), 383-399.

索　引